中国科学: 数学 评审中稿件

www.scichina.com math.scichina.com

非交换代数的判别式及其应用

献给刘绍学教授90华诞

王艳华[1], 张坚[2]

1.上海财经大学数学学院, 上海市金融信息技术研究重点实验室, 中国, 上海 200433;
2.华盛顿大学数学系, 美国, 华盛顿, 西雅图 98195.
E-mail: yhw@mail.shufe.edu.cn[1], zhang@math.washington.edu[2]

国家留学基金委资助项目(批准号: [2016]3099)[1], 上海市教育委员会科研创新项目(项目编号: 15ZZ037)[1], 海外留学回国人员科研启动基金[1], 上海科学技术委员会基金(项目编号: 15511107300)[1], 美国国家自然科学基金项目(项目号：DMS-1402863, DMS-1700825)[2],

摘要 本文总结了近几年代数学家在非交换代数判别式方面的主要工作. 列举了目前得到的一些非交换代数的判别式, 并综述了非交换代数判别式在代数自同构群、同构问题、消去问题、Tits原理以及Azumaya轨迹等方面的应用和结果.

关键词 判别式 代数自同构 仿射 主控元 消去问题 Azumaya轨迹

MSC (2010) 主题分类 16W20, 11R29

1 引言

判别式(discriminant)的早期形式可以追溯到著名数学家Cayley在1848年的论文《On the theory of elimination》[1]和Sylvester在1851年的论文《On a remarkable discovery in the theory of canonical forms and of hyperdeterminants》[2]中的几个特殊的表达式. 在线性代数和数论中, 判别式被广泛用于研究多项式的合成以及高次方程的不变量. 此外, 判别式还与Galois群、牛顿等式、多项式的导子以及多项式的结式等都有着紧密的联系 [3] [4]. 纵观数学历史, 判别式一直以来都是数学研究中的一个重要不变量, 尤其在数论、交换代数、代数几何等领域中都扮演着非常重要的角色。

数学研究中的另外一个重要的不变量是自同构群, 事实上, 每个数学对象在它存在的范畴中都可以定义它的自同构群. 自同构群不仅是对数学对象对称性的一种刻画, 也是原有对象结构的一种本质体现. 本文中, 我们讨论的自同构群都是指代数(或环)的自同构群. 众所周知, 域$\Bbbk$上的多项式代数$\Bbbk[x]$的自同构均为形如

$$g : x \mapsto ax + b, a \neq 0, a, b \in \Bbbk$$

的自同构; $\Bbbk[x_1, x_2]$ 的自同构都是tame自同构 [5] [6]; 而关于交换多项式代数$\Bbbk[x_1, x_2, x_3]$的自同构群问题目前还没有完全解决, 迄今为止, 此方面得到的最好并且最著名的结果是Shestakov-Umirbaev证明了$\Bbbk[x_1, x_2, x_3]$具有wild自同构 [7]. 近些年, 随着非交换代数的发展, 越来越多的人开始关注非交换代

英文引用格式: Yanhua Wang, James Zhang. Discriminants of noncommutative algebras and their applications(in Chinese). Sci Sin Math, 2018, 48: 1–XX, doi: 10.1360/N012016-XXX

数的自同构群, 并取得了重要的结果, 如：在量子系数q不是单位根的情况下, Alev-Chamarie、Alev-Dumas以及Alev-Hodges-Vivas给出了一些量子群和量子Weyl代数的自同构 [8] [9] [10]；Andruskiewitsch-Dumas给出了量子群正部分的自同构群的猜想 [11]；Bavula-Jordan研究了广义Weyl代数的同构问题和自同构群 [12]；Gomez-Torrecillas-El Kaoutit给出了量子辛空间坐标环的自同构群 [13]; Launois-Lenagan给出了低阶量子矩阵代数的自同构群 [14]; Suarez-Alvarez-Vivas研究了量子广义Weyl代数的同构和自同构 [15]. 2012年至2013年期间, Yakimov利用quantum tori的正则性成功地解决了著名的Andruskiewitsh-Dumas猜想和Launois-Lenagan猜想, 并证明了q不是单位根的情况下, 量子矩阵代数和量子泛包络代数正部分的自同构群是几乎可解的(virtually solvable) [16] [17].

鉴于判别式和自同构群在数学研究中的重要性, 如能把上述两个历史悠久的不变量有效地结合起来, 并应用到非交换代数的研究中, 将是一件非常有意义的事情. 基于以上思想, 从2015 年起, Ceken-Palmieri及本文作者开始利用非交换代数的判别式研究代数的自同构群 [18] [19]. 最近的研究表明判别式在代数自同构群、代数同构问题、消去问题、Tits原理(Tits Alternative) 以及Azumaya 轨迹(Azumaya locus)等方面有着广泛的应用. 下图列举了近几年非交换代数的判别式在上述各方面的相关工作：

问题	文章
判别式的计算	[18]、[19]、[20]、[21]、[22]、[23]、[24] 、[25]
自同构问题	[18]、[19]、[21]、[22]、[25]、[26]
同构问题	[18]、[24]、[27]
消去问题	[20]、[24]、[25]、[28]、[29]
Tits原理	[25]、[27]
Azumaya轨迹	[22]、[30]

本文共分六节, 第二节介绍了判别式的概念以及目前得到的一些非交换代数的判别式; 第三节给出了判别式在代数自同构群和代数同构问题方面的应用; 第四节给出了判别式在消去问题方面的应用; 第五节简单地给出了判别式与Azumaya轨迹之间的关系; 第六节为总结.

2 判别式的计算

判别式的定义由来已久, 首先我们来回顾一下数论中判别式的经典定义. 如果$f(x)$是$\mathbb{Q}$上的n次多项式, $x_1, x_2, \cdots, x_n$是$f(x)$的根, 则$f(x)$的*判别式*定义为

$$\operatorname{dis}(f(x)) = \prod_{i<j}(x_i - x_j)^2 = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \prod_{i \neq j}(x_i - x_j) \in \mathbb{Q}.$$

如果F是$\mathbb{Q}$的有限维Galois扩张, 记$\mathcal{O}_F$是F的整数环, 并且$\mathcal{O}_F = \mathbb{Z}[\alpha] \cong \mathbb{Z}[x]/(f(x))$, 其中$f(x) \in \mathbb{Z}[x]$是$\alpha$的极小多项式, 则$F$在$\mathbb{Q}$上的*判别式*$\operatorname{dis}(F/\mathbb{Q})$定义为$\operatorname{dis}(f(x))$. 易证$\operatorname{dis}(F/\mathbb{Q}) \in \mathbb{Z}$, 并且$\operatorname{dis}(F/\mathbb{Q})$与$f(x)$及$\alpha$的取法无关.

判别式有多个等价的定义, 下面我们给出非交换代数判别式的几种形式. 设$\Bbbk$是域, A是$\Bbbk$-代数, R是A的中心. 定义A的*迹映射*为一个R-线性映射

$$\operatorname{tr} : A \longrightarrow R,$$

使得对于任意的$a, b \in A$, $\mathrm{tr}(ab) = \mathrm{tr}(ba)$. 如果$A$是$R$上秩为$n$的自由模, 则$A$的左乘映射可以诱导出代数映射

$$l_m: \ A \longrightarrow \mathrm{End}_R(A) \longrightarrow M_n(R).$$

设tr_m为通常矩阵的迹, 定义A的*正则迹映射*为

$$\mathrm{tr}_{\mathrm{reg}} : A \xrightarrow{lm} M_n(R) \xrightarrow{\mathrm{tr}_m} R.$$

值得一提的是, 尽管对任意的迹映射都可以给出下文中判别式的定义, 除非特别说明, 本文中我们主要利用正则迹映射, 简记tr_{reg}为tr. 实际上, 上述的中心R可以取成R的任意中心子代数, 参见文献 [18]和 [19].

记$R^\times$为R中可逆元的集合, 对任意的$f, g \in R$, $f =_{R^\times} g$表示$f = cg$, 其中$c \in R^\times$, 集合Z的阶记为$|Z|$. 下面给出非交换代数在其中心或中心子代数R 上的判别式的定义, 可参考文献 [18]、 [19]、[32]、[33]、[34]中的相关定义.

定义2.1 [18] 设A是一个代数, R是A的中心, s是正整数,

(1) A的子集$Z = \{z_i\}_{i=1}^s$的*判别式*定义为

$$d_s(Z : \mathrm{tr}) = \det(\mathrm{tr}(z_i z_j)_{s\times s}) \in R.$$

这里det表示矩阵的行列式.

(2) A的*s-判别式理想*$D_s(A, tr)$定义为由判别式集$\{d_s(Z : \mathrm{tr}) | Z \subset A, |Z| = s\}$在$R$中生成的理想.

(3) 设A是R上秩为s的有限生成自由R-模, 若Z是A在R上的基, 则A在R上的*判别式*定义为

$$d(A/R) =_{R^\times} d_s(Z : \mathrm{tr}).$$

易证, $d(A/R)$与基Z的选取无关.

设B是整环, 元素$a \in B$如果满足$aB = Ba$, 则称a为B的*正规元*(normal element). 令$b \in B$, a是B的正规元, 如果存在元素$x \in B$使得$b = ax$, 则称正规元a整除b. 设集合$\mathcal{D} := \{b_i\}_{i\in I} \subseteq B$, 如果正规元$a$整除所有的$b_i$, 其中$i \in I$, 则称$a$为$\mathcal{D}$的*公因子*; 如果正规元$a$是$\mathcal{D}$的公因子, 并且$\mathcal{D}$的任意公因子都整除$a$, 则称$a$是$\mathcal{D}$在$B$中的*最大公因子*, 记为$\mathrm{gcd}_B\mathcal{D}$. 注意到如果有整环$C \subseteq B$, 使得$\mathcal{D} \subseteq C \subseteq B$, 则$\mathrm{gcd}_C\mathcal{D}$和$\mathrm{gcd}_B\mathcal{D}$不一定都存在, 即使都存在, 它们也不一定相等. 上述定义可参考文献 [19]和 [25].

进一步地, 我们有如下定义:

定义2.2 [19] 设A是代数, R是A的中心, s是正整数, $Z = \{z_i\}_{i=1}^s$和$Z' = \{z_i'\}_{i=1}^s$是A的两个s-子集,

(1) 子集对(Z, Z')的*判别式*定义为

$$d_s(Z, Z' : \mathrm{tr}) = \det(\mathrm{tr}(z_i z_j')_{s\times s}) \in R.$$

(2) A的*改良的s-判别式理想*$MD_s(A : \mathrm{tr})$定义为由判别式集

$$\{d_s(Z, Z' : \mathrm{tr}) | Z \subset A, Z' \subset A, |Z| = |Z'| = s\}$$

在R中生成的理想.

(3) 如果判别式集$\{d_s(Z, Z' : \mathrm{tr}) | Z \subset A, Z' \subset A, |Z| = |Z'| = s\}$在$A$中的最大公因子存在, 则$A$在$R$上的*$s$-判别式*定义为

$$d_s(A/R) = \mathop{\mathrm{gcd}_A}_{Z, Z' \subset A} (d_s(Z, Z' : \mathrm{tr})).$$

下面给出一些非交换代数在其中心子代数上的判别式.

由$x_1, x_2, \cdots, x_n$生成, 满足关系$x_ix_j + x_jx_i = 1 (i \neq j)$的代数称为$(-1)$-量子Weyl代数, 记为$W_n$. 文献 [18]计算了两个元素生成的$(-1)$-量子Weyl代数$W_2 = k\langle x, y\rangle/(xy+yx-1)$的判别式为$-2^4(4x^2y^2-1)^2$. 另外, 文献 [18]也指出了$n$为偶数时, W_n的中心为$R = \Bbbk[x_1^2, x_2^2, \cdots, x_n^2]$; n为奇数时, $\Bbbk[x_1^2, x_2^2, \cdots, x_n^2]$只是包含于$W_n$的中心的一个中心子代数. 在此基础上, Chan-Young-Zhang给出了W_n在其中心子代数$\Bbbk[x_1^2, x_2^2, \cdots, x_n^2]$上的判别式:

定理2.3 [20] 设char$\Bbbk \neq 2$, 则(-1)-量子Weyl代数W_n在其中心子代数$R = \Bbbk[x_1^2, x_2^2, \cdots, x_n^2]$上的判别式为

$$d(W_n/R) =_{\Bbbk^\times} \begin{vmatrix} 2x_1^2 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 2x_2^2 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 2x_n^2 \end{vmatrix}^{2^{(n-1)}}.$$

另外, Chan-Young-Zhang也得到了q-量子Weyl代数的判别式, 具体结论如下:

定理2.4 [20] 令$n > 2$, $q \in \Bbbk^\times$是本原n-阶单位根. $A_q := \Bbbk\langle x, y\rangle/(yx - qxy - 1)$为$q$-量子Weyl代数, 则$A_q$在其中心$R = \Bbbk[x^n, y^n]$上的判别式为

$$d(A_q/R) =_{\Bbbk^\times} ((1-q)^n x^n y^n - 1)^{n(n-1)}.$$

设p是正整数, 基于定义2.1和定义2.2, Chan-Young-Zhang给出了p-阶判别式的定义:

定义2.5 [25]设s是正整数, 如果集合

$$\mathcal{D}_{s,p} := \{d_s(Z_1, Z_2)d_s(Z_3, Z_4)\cdots d_s(Z_{2p-1}, Z_{2p}) | Z_i \subseteq A, |Z_i| = s, \forall i = 1, \cdots, 2p\}$$

在A中的最大公因子存在, 则A在R上秩为s的p-阶判别式定义为:

$$d_s^{[p]}(A/R) = \gcd{}_A(\mathcal{D}_{s,p}).$$

设$A = \bigoplus_{i\in\mathbb{Z}} A_i$是$\mathbb{Z}$-分次代数, v是一正整数, A的v-阶*Veronese*子环定义为$A^{(v)} := \bigoplus_{i\in\mathbb{Z}} A_{vi}$.

令$m, n \geqslant 2$是整数, q是m-阶本原单位根, 记$A := \Bbbk_q[x_1, x_2, \ldots, x_n]$是生成元为$x_1, \cdots, x_n$, 生成关系为$x_jx_i = qx_ix_j (1 \leqslant i < j \leqslant n)$的斜多项式代数. 令

$$y_k := q^{-[n/2]k(k+1)/2}(x_1^k x_2^{(m-k)} x_3^k x_4^{(m-k)} \cdots),$$

其中$0 \leqslant k \leqslant m$. 特别地,

$$y_0 = x_2^m x_4^m \cdots x_{2[n/2]}^m,$$
$$y_m = (-1)^{[n/2](m+1)} x_1^m x_3^m \cdots x_{2[n/2]-1}^m.$$

下面的定理给出了斜多项式代数的Veronese子环的判别式:

定理2.6 [25] 设斜多项式代数A的Veronese子环为$B := \Bbbk_q[x_1, x_2, \ldots, x_n]^{(v)}$. 若char$\Bbbk \nmid m$, 并且$g$为$v$和$m$的最大公因子, 则有如下结论:

(1) 当n是奇数时, B的中心为$R=\Bbbk\langle x_i^m, y_j\rangle\cap\Bbbk_q[x_1,x_2,\cdots,x_n]^{(v)}$, 且$\mathrm{rank}(B/R):=w=m^{n-1}$. 若$v|wp(g-1)$, 则$B$在$R$上的$p$-阶判别式为

$$d_w^{[p]}(B/R)=_{\Bbbk^\times}(x_1x_2\cdots x_n)^{wp(g-1)}.$$

(2)当n是偶数时, B的中心为$R=\Bbbk\langle x_i^m, y_{jm/g}\rangle\cap\Bbbk_q[x_1,x_2,\cdots,x_n]^{(v)}$, 且$\mathrm{rank}(B/R):=w=m^n/g^2$. 若$v|wp(\frac{m}{g}-1)$, 则$B$在$R$上的$p$-阶判别式为

$$d_w^{[p]}(B/R)=_{\Bbbk^\times}(x_1x_2\cdots x_n)^{wp(\frac{m}{g}-1)}.$$

设(A,μ_A)与(B,μ_B)是代数, 其乘法分别记为μ_A与μ_B. 设$\tau:B\otimes A\longrightarrow A\otimes B$是$\Bbbk$-线性同态, 对$\forall a\in A, b\in B$, 满足$\tau(b\otimes 1_A)=1_A\otimes b$和$\tau(1_B\otimes a)=a\otimes 1_B$. 令$\mu_\tau:=(\mu_A\otimes\mu_B)(\mathrm{Id}_A\otimes\tau\otimes\mathrm{Id}_B)$. 如果$(A\otimes B,\mu_\tau)$构成一个结合代数, 记$A\otimes_\tau B:=(A\otimes B,\mu_\tau)$, 称$A\otimes_\tau B$为$A$与$B$的扭张量积（twisted tensor product）. 2016 年, Gaddis-Kirkman-Moore开始研究扭张量积代数的判别式, 给出了一些Ore扩张代数和斜群代数的判别式 [21].

定理2.7 [21] 设A是代数, G是群, M是G的子半群, e_M是M的单位元, $Z(M)$是M的中心. 设$\rho: G\longrightarrow\mathrm{Aut}(A)$是群同态, 满足$\mathrm{Im}(\rho|_M)\cap\mathrm{Inn}(A)=\{\mathrm{Id}_A\}$, 且$H:=\ker\rho\cap M\subseteq Z(M)$. 令$T=A\otimes_\tau\Bbbk M$, R是T的中心子代数, 满足如下条件:

(1) A是$A\cap R$上的自由模, 且$\mathrm{rank}(A/A\cap R)=n<\infty$,

(2) $R=(A\cap R)\otimes\Bbbk H$,

(3) 存在$\Bbbk M$在$\Bbbk H$上的一组基$\{m_1=e_M,m_2,\cdots,m_l\}$, 其中$m_i\in M, i=1,\cdots,l$,

则有

$$d(T/R)=_{R^\times}(d(A/A\cap R))^l(d(\Bbbk M/\Bbbk H))^n.$$

定理2.8 [21] 设A是代数, $S:=A[t;\sigma]$是A的Ore扩张代数, 其中$\sigma\in\mathrm{Aut}(A)$, σ的阶为m, 且对$1\leqslant i<m$, σ^i 不是内自同构. 若R是S的中心子代数, 记$B=R\cap A^\sigma$. 如果A是B上秩为n的有限生成自由模, 且$R=B[t^m]$, 则S是R上的有限生成自由模, 并且

$$d(S/R)=_{R^\times}(d(A/B))^m(t^{m-1})^{mn}.$$

定理2.9 [21] 令A是一个代数, $Z(A)$是A的中心, G是有限群, e_G是G的单位元, G在A上的作用为自同构作用, 并且G中非可逆元对应的自同构不是内自同构. 令$S=A\#G$, 其中$A\hookrightarrow S: a\to a\otimes e_G$. 如果$A$在其中心子代数$R\subseteq Z(A)^G:=\{a|g\cdot a=a, g\in G, a\in Z(A)\}$上是有限生成自由模, 则$S$是$R$上的有限生成自由模, 且

$$d(S/R)=_{R^\times}d(A/R)^{|G|}.$$

Hopf代数作为群代数的推广, 其结构比群结构更为复杂和深刻, 并且群的很多理论可以相应地推广到Hopf代数上. 设$n\geqslant 2$, λ是n-阶本原单位根. n-阶Taft代数$H:=H_n(\lambda)$是由g,x生成的Hopf代数, 其代数结构为:

$$g^n=1, x^n=0, xg=\lambda gx,$$

余代数结构为:

$$\triangle(g)=g\otimes g, \varepsilon(g)=1, \triangle(x)=g\otimes x+x\otimes 1, \varepsilon(x)=0,$$

对极为:

$$S(g)=g^{n-1}, S(x)=-g^{n-1}x.$$

若A是一个左H-模代数, 且没有非零的Hopf理想可以零化A, 则称A是内忠实(inner faithful)的H-模代数, 或H在A上的作用是内忠实的. 记$A^H=\{a|h\cdot a=\varepsilon(h)a, a\in A, h\in H\}$. 设$q\in \Bbbk^\times$, Gadddis-Won-Yee在文献 [22]中指出H在量子平面$\Bbbk_q[x,y]=\Bbbk\langle x,y|yx-qxy\rangle$ 和q-量子Weyl代数$A_q=\Bbbk\langle x,y|yx-qxy-1\rangle$上的某一类作用是内忠实的当且仅当$|q|||\lambda|$, 其中$|q|, |\lambda|$分别为$q$和$\lambda$的阶. 并且文献 [22]也证明了: 如果$n=|\lambda|=|q|\geqslant 2$, 则$A\#H$的中心是$Z(A\#H)=A^H=\Bbbk[x^n,y^n]$. 另外, 文献 [22]还给出了Taft代数与量子平面或q-量子Weyl 代数的Smash积的判别式.

定理2.10 [22] 若A是量子平面$\Bbbk_q[x,y]$或q-量子Weyl代数A_q, H是n-阶Taft代数. 如果A是一个给定的内忠实H-模代数(见 [22, Proposition 2.1和Remark 2.3]), 则$A\#H$在A^H上的判别式为

$$d(A\#H/A^H)=_{\Bbbk^\times} x^{2n^4(n-1)}.$$

本节的最后, 我们来回顾一下Yakimov和他的学生在判别式方面的工作.

设char$\Bbbk=0$, $(A,\{-,-\})$是$\Bbbk$上的Poisson代数. 令$a\in A$, 如果对任意的$x\in A$, 存在A的Poisson导子∂, 使得$\{a,x\}=a\partial(x)$, 称a是A的*Poisson正规元*(Poisson normal element). 既是素元又是Poisson正规元的元素, 称为*Poisson 素元*. 文献 [23]和 [24]指出a是Poisson正规元当且仅当主理想(a)是Poisson理想, p是Poisson素元当且仅当主理想(p)即是非零素理想又是Poisson理想.

令A是$\Bbbk[q^{\pm1}]$-代数, 对于$\varepsilon\in\Bbbk^\times$, 定义$A_\varepsilon:=A/(q-\varepsilon)A$. 令$\sigma: A\longrightarrow A_\varepsilon$为典型投射, A_ε的中心$Z(A_\varepsilon)$也是一个Poisson代数, 其Poisson结构为:

$$\{\sigma(x_1),\sigma(x_2)\}:=\sigma(\frac{x_1x_2-x_2x_1}{q-\varepsilon}),\ x_i\in\sigma^{-1}(Z(A_\varepsilon)).$$

令C_ε是中心$Z(A_\varepsilon)$的Poisson子代数, 并且使得A_ε是C_ε上秩有限的自由模. 设$\{x_j|1\leqslant i\leqslant n\}$为$A_\varepsilon$在$C_\varepsilon$上的一组基, A_ε在C_ε上的判别式为定义2.1(3)中的形式:

$$d(A_\varepsilon/C_\varepsilon):=\det(\mathrm{tr}(x_ix_j)_{n\times n}).$$

定理2.11 [23] 设A是$\Bbbk[q^{\pm1}]$-代数, A_ε是C_ε上秩有限的自由模, 则有

(1) $d(A_\varepsilon/C_\varepsilon)$是$(C_\varepsilon,\{-,-\})$的Poisson正规元.

(2) 若C_ε是A_ε的唯一因式分解整环(UFD)或Noetherian Poisson唯一因式分解整环, 则有判别式

$$d(A_\varepsilon/C_\varepsilon)=0$$

或

$$d(A_\varepsilon/C_\varepsilon)=_{C_\varepsilon^\times}\prod_{i=1}^m p_i,$$

其中$p_1,\cdots,p_m\in C_\varepsilon$是Poisson素元.

定理2.11是一个非常深刻的定理, 其判别式的形式不仅与交换代数判别式的形式非常相似, 而且有效地把Poisson素元和判别式结合起来. 定理2.11有很多应用, 下面我们举例说明. 令char$\Bbbk=0$, $n>1$为整数, 量子矩阵代数$A_q[M_n]$为由x_{ij}生成的$\Bbbk[q^{\pm1}]$-代数, 且满足: 对于$i,j\in[1,n]:=\{1,2,\cdots n\}$有如下关系:

$$x_{ij}x_{kj}=qx_{kj}x_{ij},\ i<k,$$

$$x_{ij}x_{ir}=qx_{ir}x_{ij},\ j<r,$$
$$x_{ij}x_{kr}=x_{kr}x_{ij},\ i<k,j>r,$$
$$x_{ij}x_{kr}-x_{kr}x_{ij}=(q-q^{-1})x_{ir}x_{kj},\ i<k,j<r.$$

设l是大于2的奇数, $\varepsilon\in\Bbbk$为l-阶本原单位根, 定义$A_\varepsilon[M_n]:=A_q[M_n]/(q-\varepsilon)A_q[M_n]$, $\sigma:A_q[M_n]\to A_\varepsilon[M_n]$, 则元素$z_{ij}:=\sigma(x_{ij})^l$是$A_\varepsilon[M_n]$的中心元, 即$z_{ij}\in Z(A_\varepsilon[M_n])$. 令$C_\varepsilon[M_n]$是由元素$z_{ij}$生成的中心$Z(A_\varepsilon[M_n])$的子代数, 且有$C_\varepsilon[M_n]\cong\Bbbk[z_{ij},1\leqslant i,j\leqslant n]$, 则$A_\varepsilon[M_n]$是$C_\varepsilon[M_n]$上的自由模. 记$\Delta_{I,J}$是矩阵$(z_{ij})_{n\times n}$的余子式 [23], 其中行$I\subseteq[1,n]$, 列$J\subseteq[1,n]$.

定理2.12 [23] 设char$\Bbbk=0$, n为正整数, l是大于2的奇数, $\varepsilon\in\Bbbk$为l-阶本原单位根, 则代数$A_\varepsilon[M_n]$在$C_\varepsilon[M_n]$上的判别式为

$$d(A_\varepsilon[M_n]/C_\varepsilon[M_n])=_{\Bbbk^\times}\prod_{k=1}^{n}\Delta^L_{[n-k+1,n];[1,k]}\prod_{j=1}^{n-1}\Delta^L_{[1,j];[n-j+1,n]},$$

其中$L:=l^{n^2-1}(l-1)$.

3 判别式与自同构群

代数的自同构群是一个非常重要的不变量. 除了几类特殊的代数外, 一般很难计算代数A的自同构群Aut(A). 在引言中我们提到了关于自同构群方面的一些最新工作. 令人惊奇的是代数A在其中心R上的判别式是控制自同构群的一个有效不变量: 如果一个代数在其中心上的判别式是主控的(dominating), 见定义3.4, 则我们可以得到这个代数自同构群的完全刻画, 见定理3.6. 下面我们将来介绍此方面的一些研究结果.

如果$\Bbbk$-代数$A=\Bbbk\oplus A_1\oplus A_2\oplus\cdots$, 其中$A_i$为有限维线性空间, 并且对任意的$i,j\in\mathbb{N}$, A_i,A_j满足$A_iA_j\subset A_{i+j}$, 则称A为*局部有限连通分次代数*.

定义3.1 设$A=\cup_{i>0}F_iA$是一个滤子代数, 其结合分次代数是连通的. 如果自同构$g\in\mathrm{Aut}(A)$满足$g(F_1A)\subset F_1A$, 则称g为*仿射*(affine)*自同构*.

定义3.2 设$x_1,\cdots,x_n$是A的生成元, $g\in\mathrm{Aut}(A)$, 若存在指标s, 使得

$$g(x_i)=\begin{cases}x_i, & i\neq s,\\ x_s+f, & i=s,\end{cases}\tag{3.1}$$

其中f是由$x_1,\dots,x_{s-1},x_{s+1},\dots,x_n$生成的, 则称$g$为*初等*(elementary)*自同构*.

如果自同构g是由仿射自同构和初等自同构生成的, 则称g为*可控*(tame)*自同构*. 关于以上自同构的具体内容可参考文献 [18].

定义3.3 设A是代数, h是$A[t]$的自同构. 如果存在自同构$g\in\mathrm{Aut}(A)$, $c\in\Bbbk^\times$及A的中心元r, 使得

$$h(t)=ct+r,\quad h(x)=g(x)\in A,\forall x\in A,$$

则称h为*三角自同构*.

令Y是代数A的一个有限维子空间, $F=\{F_nA:=(\Bbbk\oplus Y)^n|n\geqslant 0\}$为$A$的穷举(exhaustive)滤子, 即$\cup_nF_nA=A$. 如果$A$对应的分次环gr$A$是连通的, 且任意$f\in F_nA\setminus F_{n-1}A$对应的分次元为gr$(f)=f+$

$F_{n-1}A \in (\mathrm{gr}_F A)_n := F_nA/F_{n-1}A$, 则元素$f$的次数定义为分次元$\mathrm{gr}(f)$的次数, 即, $\deg(f) := \deg(\mathrm{gr}f)$. 下面我们给出主控元的定义:

定义3.4 [18] 设A由有限维子空间$Y = \bigoplus_{i=1}^{n} \Bbbk x_i$生成, $1_A \notin Y$, 且A的连通分次环

$$\mathrm{gr}A := \oplus_{i\geqslant 1}(\Bbbk 1_A \oplus Y)^i/(\Bbbk 1_A \oplus Y)^{i-1}$$

是一个整环. 元素$f \in A$如果满足以下条件: 任意使得其分次代数$grT = \oplus_{i\geqslant 0} F_iT/F_{i-1}T$是连通分次整环的$\mathbb{N}$-滤子代数$T$, 对任意$\Bbbk$-模$T/F_0T$中线性无关的子集$\{y_1,\ldots,y_n\} \subset T$, 存在$f$在自由代数$\Bbbk\langle x_1,\ldots,x_n\rangle$中的一个原像$f(x_1,\ldots,x_n)$, 使得

$$f(y_1,\ldots,y_n) = 0,$$

或者满足

(a) $\deg(f(y_1,\cdots,y_n)) \geqslant \deg(f)$,

(b) 如果存在i_0使得$\deg(y_{i_0}) > 1$, 则有$\deg(f(y_1,\cdots,y_n)) > \deg(f)$,

则称元素f为A的*主控元*(dominating).

为叙述方便, 我们定义Af*范畴*为结合$\Bbbk$-代数范畴的一个子范畴, 并由满足如下条件的代数生成 [18]:

(1) A是滤子代数, 且A在其中心R上是有限生成自由模,

(2) $\mathrm{gr}A$是连通分次整环,

(3) A的判别式$d(A/R)$是主控元.

例如生成元个数为偶数的(-1)-量子Weyl代数和文献 [26]中出现的广义量子Weyl代数都属于Af范畴中的代数.

定理3.5 [18] 设A是Af范畴中的代数, 则有:

(1)A的自同构是仿射自同构.

(2) A的多项式扩张$A[t]$的自同构是三角自同构.

进一步, 设域$\Bbbk$的特征为0, 则

(3) A的局部幂零导子是零导子.

(4) $\mathrm{Aut}(A)$是代数群, 且具有如下的正合分解

$$1 \longrightarrow (\Bbbk^{\times})^r \longrightarrow \mathrm{Aut}(A) \longrightarrow S \longrightarrow 1, \tag{3.2}$$

其中$r \geqslant 0$, S是有限群.

下面给出几个Af范畴中代数的例子. 令$p,q,\lambda,\mu \in \Bbbk^{\times}$, $R = \Bbbk[z]_q[s,t]$是由z,s,t生成, 满足关系

$$zs = sz, zt = tz, st = qts$$

的$\Bbbk$-代数. Tang在文献 [26]中介绍了代数$A_p(\lambda,\mu,\Bbbk_q[s,t])$, 其生成元为$x,y,s,t$, 生成关系为

$$xy - pyx = 1, st = qts, sx = \lambda xs,$$
$$sy = \lambda^{-1}ys, tx = \mu xt, ty = \mu^{-1}yt.$$

Tang证明了$A_p(\lambda,\mu,\Bbbk_q[s,t])$是$R = \Bbbk[z]_q[s,t]$上的广义量子Weyl代数, 且当$p,q$是单位根时, $A_p(1,1,\Bbbk_q[s,t])$属于Af 范畴, 于是有如下的结论:

定理3.6 [26] 假设$p \neq 1, q \neq 1$, 则

(1) $A_p(1,1,\Bbbk_q[s,t])$的代数自同构是仿射自同构, 并且有

(a) 若$p\neq -1, q\neq -1$, 则$\mathrm{Aut}(A_p(1,1,\Bbbk_q[s,t]))=(\Bbbk^{\times})^3$.

(b) 若$p=-1, q\neq -1$或$p\neq -1, q=-1$, 则$\mathrm{Aut}(A_p(1,1,\Bbbk_q[s,t]))=\mathbb{Z}_2\ltimes(\Bbbk^{\times})^3$.

(c) 若$p=-1, q=-1$, 则$\mathrm{Aut}(A_p(1,1,\Bbbk_q[s,t]))=\mathbb{Z}_2\ltimes(\mathbb{Z}_2\ltimes(\Bbbk^{\times})^3)$.

(2) 扩张代数$A_p(1,1,\Bbbk_q[s,t])[w]$的自同构是三角自同构. 进一步地, 若ϕ是$A_p(1,1,\Bbbk_q[s,t])[w]$的自同构, 则

$$\phi(x)=\phi_0(x), \phi(y)=\phi_0(y), \phi(s)=\phi_0(s), \phi(t)=\phi_0(t), \phi(w)=aw+b,$$

其中ϕ_0是$A_p(1,1,\Bbbk_q[s,t])$的自同构, $a\in\Bbbk^{\times}$, b是$A_p(1,1,\Bbbk_q[s,t])$的某个中心元.

(3)如果$\mathrm{char}\Bbbk=0$, 则$A_p(1,1,\Bbbk_q[s,t])$的局部幂零导子为零导子.

另一个Af范畴中代数的例子是(-1)-量子Weyl代数W_n的一个推广. 令$\mathcal{A}=\{a_{ij}\mid 1\leqslant i<j\leqslant n\}$是$\Bbbk$中的数集, 定义*广义$(-1)$-量子Weyl代数*$V_n(\mathcal{A})$为由$x_1,x_2,\cdots,x_n$ 生成, 满足关系$x_ix_j+x_jx_i=a_{ij}$的代数, 其中$i<j$. 特别地,

(1) 如果$a_{ij}=0$, 则$V_n(\mathcal{A})$是斜多项式代数$V_n:=\Bbbk_{-1}[x_1,\ldots,x_n]$.

(2) 如果$a_{ij}=1$, 则$V_n(\mathcal{A})$是(-1)-量子Weyl代数W_n.

当n是偶数时, $V_n(\mathcal{A})$是其中心上有限生成自由代数, 且属于Af范畴, 此时$V_n(\mathcal{A})$的自同构是仿射自同构; 当n是奇数时, $V_n(\mathcal{A})$在其中心上不是有限生成自由代数. 在此基础上, 我们亦得到了关于广义(-1)-量子Weyl代数的自同构群的一个结论 [18] [27].

定理3.7 [18] [27] 设$V_n(\mathcal{A})$是广义(-1)-量子Weyl代数, 则

(1) 当n是偶数时, $V_n(\mathcal{A})$是其中心$R=\Bbbk[x_1^2,\ldots,x_n^2]$上有限生成秩为$2^n$的自由模, 且$V_n(\mathcal{A})$的自同构都是仿射自同构.

(2) 设n是大于等于3的奇数, 且$\mathrm{char}\Bbbk\nmid(n-1)!$, 则自同构群$\mathrm{Aut}(V_n(\mathcal{A}))$包含由两个生成子生成的自由群, 即$\mathrm{Aut}(V_n(\mathcal{A}))$是包含可数个生成元的自由群.

设G是一个群, 如果存在正规可解子群N使得G/N是有限群, 则称群G是*几乎可解的*(virtually solvable). 1972年, Tits给出了著名的*Tits Alternative*理论, 以下简记为*TA*理论:

TA理论. [31] 一般线性群$\mathrm{GL}_n(n,\mathbb{C})$的子群要么是几乎可解的, 要么是包含一个秩为2的自由群的群.

设Ω是一簇群, 如果Ω中每个群要么是几乎可解群, 要么是包含一个秩为2的自由群的群, 则称Ω*满足TA理论*.

由定理3.7可以得到$V_n(\mathcal{A})$的自同构群满足TA理论. 下面的定理给出了广义(-1)-量子Weyl代数同构的准则.

定理3.8 [27] 设$\mathrm{char}\Bbbk\neq 2$, n是偶数. 令$\mathcal{A}=\{a_{ij}\mid 1\leqslant i<j\leqslant n\}$与$\mathcal{A}'=\{a'_{ij}\mid 1\leqslant i<j\leqslant n\}$是$\Bbbk$中的数集. 则$V_n(\mathcal{A})\cong V_n(\mathcal{A}')$当且仅当存在置换$\sigma\in S_n$与非零数$\lambda_i$, $i=1,\cdots,n$, 使得对任意的$1\leqslant i<j\leqslant n$, 有$a'_{ij}=\lambda_i\lambda_j a_{\sigma(i)\sigma(j)}$.

从定理3.8可以得到, 当$n\geqslant 4$是偶数时, 存在无限多个非同构的广义(-1)-量子Weyl代数$V_n(\mathcal{A})$. 下面给出更多的关于量子代数自同构群的结论.

定理3.9 [18] 令$q\in\Bbbk^{\times}$, $A_q=\Bbbk\langle x,y\rangle/(yx-qxy-1)$是$q$-量子Weyl代数. 定义

$$B:=A_{q_1}\otimes\cdots\otimes A_{q_m},$$

这里对$i=1,\ldots,m$, 有$q_i\in\Bbbk^{\times}\setminus\{1\}$,

(1) 代数B的自同构是仿射自同构, $\mathrm{Aut}(B)$是代数群且满足如下的正合列

$$1 \to (\Bbbk^{\times})^m \to \mathrm{Aut}(B) \to S \to 1.$$

(2) 扩张代数$B[t]$的自同构是三角自同构.

(3) 如果$\mathrm{char}\Bbbk = 0$, 则B的局部幂零导子是零导子.

(4) 特别地, 对任意的$i \neq j$, 若$q_i \neq \pm 1$且$q_i \neq q_j^{\pm 1}$, 则$\mathrm{Aut}(B) = (\Bbbk^{\times})^m$; 若$q_i = q \neq \pm 1$, 则$\mathrm{Aut}(B) = S_m \ltimes (\Bbbk^{\times})^m$.

设$\{p_{ij} \in \Bbbk^{\times} | 1 \leqslant i < j \leqslant n\}$, 若$i < j$, 令$p_{ji} = p_{ij}^{-1}$, $p_{ii} = p_{jj} = 1$. 下面的定理刻画了斜多项式环$\Bbbk_{p_{ij}}[x_1, \cdots, x_n]$的判别式和自同构.

定理3.10 [19] 令$A = \Bbbk_{p_{ij}}[x_1, \ldots, x_n]$是PI(polynomial Identity)斜多项式环, R是A的中心, 则下列结论等价:

(1) 判别式$d_s(A/R)$是主控元, 其中$s = \mathrm{rank}(A/R)$.

(2) A的自同构是仿射自同构, 并且$A[t]$的自同构是三角自同构.

(3) A的中心$R \subset \Bbbk\langle x_1^{\alpha_1}, \ldots, x_n^{\alpha_n}\rangle$, 其中$\alpha_1, \ldots, \alpha_n \geqslant 2$.

如果$\mathrm{char}\Bbbk = 0$, 上述条件也等价于

(4) A的局部幂零导子为零导子.

即使对于不在Af范畴中的代数, 判别式对于这些代数的自同构的研究也有帮助.

定理3.11 [19] 令$A = \Bbbk_{p_{ij}}[x_1, \ldots, x_n]$是斜多项式代数(不必是PI的), 且对任意的$i$, x_i不是A的中心元. 令s_0是1到n之间的某个整数, 假设对于$s \neq s_0$,

$$T_s = \{(d_1, \ldots, \widehat{d_s}, \ldots, d_n) \in N^{n-1} \mid \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq s}}^{n} p_{ij}^{d_j} = p_{is} \ \forall\, i \neq s\}$$

是有限集, 则A的自同构是可控自同构.

Chan-Young-Zhang给出了斜多项式代数的Veronese子环的自同构群.

定理3.12 [25] 设$\mathrm{char}\Bbbk \neq 2$, v是正整数, 且n和v具有不同的奇偶性. 令$A = \Bbbk_{-1}[x_1, \ldots, x_n]^{(v)}$为斜多项式代数$\Bbbk_{-1}[x_1, \ldots, x_n]$的Veronese子环, 则有$\mathrm{Aut}(A) \cong S_n \ltimes (\Bbbk^{\times})^n$.

定理3.13 [25] 令v, m是正整数, 且$m > 2$, q是m-阶单位根, $A = \Bbbk_q[x_1, \ldots, x_n]^{(v)}$. 若$n$为偶数且$m \nmid v$或$n$为奇数且$\gcd(m, v) = 1$, 则有

(i) 如果q^v是1或-1, 则$\mathrm{Aut}(A) \cong \mathbb{Z}/(n) \ltimes (\Bbbk^{\times})^n$.

(ii) 如果$q^v \neq \pm 1$, 则$\mathrm{Aut}(A) \cong (\Bbbk^{\times})^n$.

推论3.14 令$n \geqslant 2$, 记$\mathcal{C}_n := \{\mathrm{Aut}(\Bbbk_q[x_1, \ldots, x_n]^{(v)}) | q \in \Bbbk^{\times}$是一个单位根$, v \in \mathbb{N}\}$, 则有:

(1) $\mathcal{C}_2$满足TA理论;

(2) 若n是奇数, 则$\mathcal{C}_n$满足TA理论.

另外, Gaddies-Kirkman-Moore给出了如下的Ore扩张代数的自同构, 见文献 [21].

定理3.15 [21] 设$S = \Bbbk[x, y][t, \sigma]$是$\Bbbk[x, y]$的Ore扩张代数, 其中$\sigma \in \mathrm{Aut}(\Bbbk[x, y])$, 且

$$\sigma(x) = y, \sigma(y) = x.$$

设$Z(S)$表示S的中心, 则有

(1) $\mathrm{d}(S/Z(S)) = 16(x - y)^4 t^4$.

(2) 设$a, b, c \in \Bbbk^{\times}, d \in \Bbbk$, 则$\mathrm{Aut}(S)$由下面两种形式的映射组成

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ t \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ b & a & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} d \\ d \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ t \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} a & a & -b \\ a & a & b \\ -c & c & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} d \\ d \\ 0 \end{pmatrix}.$$

本节最后, 我们来重述一下自同构方面仍公开的著名问题之一:

问题3.16 [36] [37] [38] 当$n \geqslant 3$时, 如何计算和刻画$\Bbbk[x_1, \cdots, x_n]$的自同构群?

4 判别式在消去问题中的应用

交换代数中的著名的Zariski消去问题是指交换多项式环$\Bbbk[x_1, \cdots, x_n]$的消去性, 见定义4.1. 目前Abhyankar-Eakin-Heinzer已经证明了$\Bbbk[x]$是可消去的 [35]; Fujita和Miyanishi-Sugie证明了域$\Bbbk$的特征为0时, $\Bbbk[x_1, x_2]$是可消去的 [39] [40]; Russell证明了域$\Bbbk$的特征大于0时$\Bbbk[x_1, x_2]$是可消去的 [41]. Gupta证明了如果域$\Bbbk$的特征大于0时, $n \geqslant 3$的多项式代数$\Bbbk[x_1, \cdots, x_n]$是不可消去的 [42] [43]. 而域$\Bbbk$的特征为0时, $n \geqslant 3$的多项式代数$\Bbbk[x_1, \cdots, x_n]$的消去性仍然是一个公开问题. 交换代数的Zariski消去问题与自同构问题、特征问题、线性化问题以及Jacobi猜想都有关系. 最近的研究表明, 非交换代数的Zariski消去问题也与代数自同构问题有关, Bell-Zhang利用非交换代数的判别式给出了可消去代数的刻画. 本节中, 我们将介绍近几年非交换代数消去问题的一些进展.

定义4.1 设A是一个代数, 如果对任意的代数B, 由$A[t] \cong B[t]$可得到$A \cong B$, 则称代数A为*可消去代数*(cancellative algebra).

一个代数如果是有限生成的, 则称其为*仿射代数*(affine algebra). 下文中, Gelfand-Kirillov维数简记为GK维数, GK维数的定义可参考文献 [44].

首先, 下面三类非交换代数是可消去的.

定理4.2 [28] 设$\Bbbk$是特征为0的代数闭域, A是GK维数为2的仿射$\Bbbk$-代数. 如果A不是交换的, 则A是可消去的.

定理4.3 [29] 设Q是有限箭图, 则路代数$\Bbbk Q$是可消去的.

另外, Abhyaankar-Eakin-Henzer证明了GK维数为1的仿射交换整环是可消去的 [35], 下面的定理给出了GK维数为1的仿射素代数的消去性.

定理4.4 [29] 设$\Bbbk$是代数闭域, 则GK维数为1的仿射素代数是可消去的.

接下来我们将介绍一下判别式与消去问题之间的关系.

定义4.5 [28] 设n是一整数, 代数A由$Y = \oplus_{i=1}^{n} \Bbbk x_i$生成, 元素$f \in A$, 如果对任意使得$grT := \oplus F_i T / F_{i-1} T$是一个整环的$\mathbb{N}$-滤化代数$T$, 对满足如下条件的任意子集$\{y_1, \cdots, y_n\} \subset T$,

(a) $\{y_1, \cdots, y_n\}$在商空间$T/\Bbbk 1_T$中是线性无关的,

(b)至少存在一个y_i不在$F_0 T$中,

若存在f在自由代数$\Bbbk\langle x_1, \cdots, x_n\rangle$中的原像$f(x_1, \cdots, x_n)$, 使得

(i)$f(y_1, \cdots, y_n) = 0$,

或者

(ii)$f(y_1, \cdots, y_n)$不属于$F_0 T$,

则称元素f为*有效元*(effective element).

实际上, 具体验证一个元素是有效元并不是一个平凡的过程. 目前主控元和有效元之间的关系尚不清楚, 在文献 [28, Example 5.6]中, 作者证明了一个元素是有效元, 但不能证明它是主控元.

定理4.6 [28] 设A是整环, 且A在其仿射中心R上是有限生成模. 如果其判别式$d(A/R)$是有效的或主控的, 则A是可消去的.

因为Af中代数的判别式$d(A/R)$是主控的, 由定理4.6知Af中的代数都是可消去的.

为了处理正特征时的消去问题, 我们要用到高导子或Hasse-Schmit导子的概念 [45]. 设A是代数, A的高导子(higher derivation)是指A的一系列$\Bbbk$-线性自同态$\partial := \{\partial_i\}_{i=0}^{\infty}$, 对任意$a, b \in A$, $n \geqslant 0$, ∂满足

$$\partial_0 = \mathrm{Id}_A, \quad \partial_n(ab) = \sum_{i=0}^{n} \partial_i(a)\partial_{n-i}(b).$$

一个高导子∂如果满足下列条件:

(1) 对$\forall a \in A$, 存在$n \geqslant 0$, 使得$i \geqslant n$时, $\partial_i(a) = 0$;

(2) 映射$G_{\partial,t} : A[t] \longrightarrow A[t]$是$A[t]$的代数自同构, 其中$a \mapsto \sum_{i=0}^{\infty} \partial_i(a)t^i$, $t \mapsto t$,

则称∂是*局部幂零高导子*(locally nilpotent higher derivation), 局部幂零高导子集合记为$\mathrm{LND}^H(A)$.

定义4.7 [28] 设A是代数, A的*Makar-Limanov*不变量 [46]定义为

$$\mathrm{ML(A)} = \bigcap_{\delta \in \mathrm{LND^H}(A)} \ker(\delta).$$

如果$\mathrm{ML}(A) = A$或A的局部幂零高导子为0, 则称A为LND^H*-rigid*.

实际上, 经典的Makar-Limanov不变量定义中使用的导子是一般的局部幂零导子, 具体细节请参考文献 [28].

定理4.8 [28] 设A是斜多项式环$\Bbbk_{p_{ij}}[x_1, \cdots, x_n]$, 其中$p_{ij}$是单位根, $i, j = 1, \cdots n$, R是A的中心, 则下列条件等价：

(1) 自同构群$\mathrm{Aut}(A)$是仿射的.

(2) 判别式$d_s(A/R)$是主控的, 其中$s = \mathrm{rank}(A/R)$.

(3) 判别式$d_s(A/R)$是有效的.

(4) A是LND^H-rigid的.

特别地, 若A满足上述等价条件中的任一个, 则A是可消去的.

定理4.9 [25] 令v是正整数, $q \in \Bbbk^\times$是m-阶本原单位根, 假设n是偶数且$m \nmid v$或n是奇数且$gcd(m, v) \neq 1$, 则代数$\Bbbk_q[x_1, \cdots, x_n]^{(v)}$是$\mathrm{LND}^H$-rigid的和可消去的.

下面进一步给出判别式在消去问题方面中的一些结果.

设域$\mathrm{char}\Bbbk = 0$, F是代数A的子集, 令$S_w(F) = \{x \in A | f = axb, a, b \in A, 0 \neq f \in F\}$, 令$D_0(F) = F$, 定义

$$D_1(F) = \Bbbk < S_w(F) > \subset A;$$

对$n > 2$, 定义

$$D_n(F) = D_1(D_{n-1}(F)),$$

则A的F-因子子代数定义为

$$D(F) = \cup_{n \geqslant 1} D_n(F).$$

如果$F = \{d(A/Z)\}$, 称$D(F)$为A的判别式-因子子代数, 记A的判别式-因子子代数为$\mathbb{D}(A)$.

定理4.10 [20] 设char$\Bbbk = 0$, A是GK维数有限的连通分次整环, 并且A是其中心上有限生成自由模. 如果$\mathbb{D}(A) = A$, 则A是可消去的.

定义4.11 [29] 设A是代数, 如果A的每一个$\Bbbk$-代数满同态$\eta : A \longrightarrow A$都是同构, 则称$A$是*Hopfian*代数. 对任意的$n \geqslant 0$, 如果$A[t_1, \cdots, t_n]$是Hopfian的, 则称$A$是强*Hopfian*代数.

文献 [29]指出, 左(或右)Noether代数、有限生成局部有限的$\mathbb{N}$-分次代数和PI的素仿射代数都是强Hopfian的.

定理4.12 [29] 如果A是强Hopfian的, 且A的中心是Artin的, 则A是可消去的.

由定理4.12可以得到如下的推论:

推论4.13 如果A是左(或右)Artin的, 则A是可消去的. 特别地, 域$\Bbbk$上的有限维代数是可消去的.

本节最后, 我们再次阐述一下关于消去的一个公开问题:

问题4.14 [36] [47] [48] Zariski消去问题: 设char$\Bbbk = 0$, $n \geqslant 3$是整数, 多项式代数$\Bbbk[x_1, \cdots, x_n]$是可消去的吗?

5 判别式与Azumaya轨迹

最近的研究结果表明, 判别式与Azumaya轨迹之间也有联系, 从而可以把判别式应用到表示论的研究中. 本节中, 我们简单回顾一下Brown-Yakimov关于判别式与Auzumaya轨迹方面的工作.

设$\Bbbk$是代数闭域, A是素$\Bbbk$-代数, 并且A在其仿射中心R上是有限生成模, 令$n = \mathrm{PIdeg}(A) < \infty$. A的*Azumaya* 轨迹定义为$\mathcal{A}(A) := \{\mathfrak{m} \in \mathrm{MaxSpec}(R) | A/\mathfrak{m}A \cong M_{n\times n}(R/\mathfrak{m})\}$. 令$I$是$R$的理想, $\mathcal{V}(I)$表示I在MaxSpec(R)中的零集. 下面是Brown-Yakimov [30]的主要结果的一个简化形式:

定理5.1 [30] 设$\Bbbk$是特征为0的代数闭域, A是$\Bbbk$上的仿射素代数, 且A是其中心R上的有限生成模. 若R是正规整环, PIdeg$(A) = n$, 则

(a) A的n^2-判别式理想的零集与A的改良的n^2-判别式理想的零集以及A的Azumaya轨迹的补集相同, 即;

$$\mathcal{V}(D_{n^2}(A/R, \mathrm{tr})) = \mathcal{V}(MD_{n^2}(A/R, \mathrm{tr})) = \mathrm{MaxSpec}(R) \setminus \mathcal{A}(A).$$

(b) 对所有整数$l > n^2$, 都有

$$D_l(A/R, \mathrm{tr}) = MD_l(A/R, \mathrm{tr}) = 0.$$

6 总结

判别式作为代数研究中的一个重要不变量, 具有悠久的研究历史和广泛的应用范围 [1] [2] [3] [4], 而且, 判别式与Morse理论、椭圆曲线、超几何函数（hyper geometric function）等都有着紧密的联系 [49]. 判别式在非交换代数中的出现始于除环上的应用 [33], 目前, 非交换代数的判别式已成为研究代数自同构群的一个重要工具. 另外, 其在代数同构问题、消去问题、Tits原理以及Azuyama轨迹等问题的研究方面也扮演着重要的角色, 为这些问题的研究带来了新的思想和新的研究方法. 判别式虽然起源于数论和代数学的研究, 但其不仅仅局限于这些领域的研究范畴, 判别式还在微分流形、代数拓扑、代数几何等的研究中有着重要的地位 [50]. 尽管如此, 目前非交换代数判别式理论还有待于进一步的发展和完善, 例如很多代数的判别式公式目前还无法得到, 一些代数自同构群还无法具体刻画出来, 判别式

的主控性和有效性的更多利用还有待研究, 期待判别式理论可以得到进一步的发展, 并应用到更多的研究领域中.

致谢: 非常感谢秦晓珊, 徐晓伟和赵志兵在本文写作过程中的认真阅读和提出的宝贵意见.

参考文献

1 Cayley A. On the theory of elimination. Cambridge and Dublin Math J, 1848, 3: 116-120; Collected papers, vol. 1: Cambridge Univ. Press, 1889, 370-374

2 Sylvester J J. On a remarkable discovery in the theory of canonical forms and of hyperdeterminants. Philosophical Magazine, 1851, 4th series, 2: 391 – 410

3 Ribenboim P. Classical theory of algebraic numbers. Universitext, Springer, Springer-Verlag New York, 2001

4 Morandi P. Field and Galois theory. Grad Text Math, vol. 147: Springer, Spring-Verlag New York, 1996

5 Jung H W E. Über ganze birationale Transformationen der Ebene. J für die reine und angewandte Math, 1942, 184: 161-174

6 van der Kulk W. On polynomial rings in two variables. Nieuw Archief voor Wisk. 1953, 27: 33-41

7 Shestakov I, Umirbaev U. The tame and the wild automorphisms of polynomial rings in three variables. J Amer Math Soc, 2004, 179(1): 197-227

8 Alev J, Chamarie M. Dérivations et automorphismes de quelques algebres quantiques. Comm Algebra, 1992, 20(6): 1787-1802

9 Alev J, Dumas F. Rigidité des plongements des quotients primitifs minimaux de $U_q(sl(2))$ dans l'algebre quantique de Weyl-Hayashi. Nagoya Math J, 1996, 143: 119-146

10 Alev J, Hodges T J, Velez J D. Fixed rings of the Weyl algebra A1(C). J Algebra, 1990, 130: 83-96

11 Andruskiewitsch N, Dumas F. On the automorphisms of $U_q^+(g)$. in: Quantum groups, in: IRMA Lect Math Theory Phys, Vol. 12, Eur. Math. Soc., Zurich, 2008, 107-133

12 Bavula V V, Jordan D A. Isomorphism problems and groups of automorphisms for generalized Weyl algebras. Trans Amer Math Soc, 2001, 353: 769-794

13 Gomez-Torrecillas J, El Kaoutit L. The group of automorphisms of the coordinate ring of quantum symplectic space. Beitrage Algebra Geometry, 2002, 43: 597-601

14 Launois S, Lenagan T H. Primitive ideals and automorphisms of quantum matrices. Algebras and Representation Theory, 2007, 10: 339-365

15 Suárez-Alvarez M, Vivas Q. Automorphisms and isomorphism of quantum generalized Weyl algebras. J Algebra, 2015, 424: 540-552

16 Yakimov M. The Launois-Lenagan conjecture. J. Algebra, 2013, 392: 1-9

17 Yakimov M. Rigidity of quantum tori and the Andruskiewitsch-Dumas conjecture. Selecta Math New Series, 2014, 20: 421-464

18 Ceken S, Palmieri J, Wang Y H, Zhang J J. The discriminant controls automorphism groups of noncommutative algebras. Adv Math, 2015, 269: 551-584

19 Ceken S, Palmieri J, Wang Y H, Zhang J J. The discriminant criterion and automorphism groups of quantized algebras. Adv Math, 2016, 286: 754-801

20 Chan K, Young A A, Zhang J J. Discriminant formulas and applications. Algebra and number theory, 2016, 10(3): 557-596

21 Gaddis J, Kirkman E, Frank Moore W. On the discriminant of twisted tensor products. J Algebra, 2017, 477: 29-55

22 Gaddis J, Won R, Yee D. Discriminants of Taft algebra smash products and applications. arXiv: 1707.02822v1, 2017

23 Nguyen B, Trampel K, Yakimov M. Noncommutative discriminants via poisson primes. Adv Math, 2017, 322: 269-307

24 Levitt J, Yakimov M. Quantized Weyl algebras at root of unity. arXiv: 1606.02121v2, 2016

25 Chan K, Young A A, Zhang J J. Discriminants and automorphism groups of Veronese subrings of skew polynomial rings. Math Z, DOI 10.1007/s 00209-017-1939-3

26 Tang X. The automorphism groups for a family of generalized Weyl algebras. J Algebra Appl, https://doi.org/10.1142/S0219498818501426

27 Ceken S, Palmieri J, Wang Y H and Zhang J J. Invariant theory for quantum Weyl algebras under finite group action. Proc Sym Pure Math, 2016, 92: 119-134

28 Bell J, Zhang J J. Zariski Cancellation problem for noncommutative algebras. Selecta Math New Series, 2017, 23(3): 1709-1737

29 Lezama O, Wang Y H, Zhang J J. Zariski cancellation problem for non-domain noncommutative algebras. arXiv: 1711.08071, 2017

30 Brown K A, Yakimov M. Azumaya loci and discriminant ideal of PI algebras. arXiv: 1702.04305v1, 2017

31 Tits J. Free subgroups in linear group. J Algebra, 1972, 20(2): 250-270

32 Alaca A, Williams K S. Introductory algebraic number theory. Cambridge Univ Press, Cambridge, 2004

33 Reiner I. Maximal orders, London Mathematical Society Monographs. New Series, vol. 28. Oxford University Press, Oxford, 2003

34 W. A. Stein. Algebraic number theory: a computational approach, preprint, `http://wstein.org/books/ant/ant.pdf`.

35 Abhyankar S S, Heinzer W, Eakin P. On the uniqueness of the coefficient ring in a polynomial ring. J Algebra, 1972, 23: 310-342

36 Karft H. Challenging problems on affiine n-space. Séminaire N. Bourbaki, 1994-1995, exp.n° 802: 295-317

37 Bass H. Automorphisms of polynomial rings. Abelian group theory, Lecture Notes in Math, vol. 1006: 1983, 762-771

38 Essen A V D. Polynomial automorphisms and Jacobian conjecture, Progress in Math, Bassel, Birkhäuser Verlag, Boston, vol. 190: 2000.

39 Fujita T. On Zariski problem. Proc. Japan Academy, Series A, Math Sci, 1979, 55(3): 106-110

40 Miyanishi M, Sugie T. Affine surfaces containing cylinderlike open sets. J Math Kyoto Univ, 1980, 20(1): 11-42

41 Russell P. On Affine-Ruled rational surfaces. Math Anna. 1981, 255(3): 287-302.

42 Gupta N. On the cancallation problem for the Affine space $\mathbb{A}^3$ in characteristic p. Inventiones Math, 2014, 195(1): 279-288

43 Gupta N. On Zariski's cancallation problem in positive characteristic. Adv Math, 2014, 264: 296-307

44 Krause G R, Lenagan T H, Growth of algebras and Gelfand-Kirillov dimension. Graduate Studies in Math. vol. 22: Providence, R I: AMS, 1999

45 Hass H, Schmit F K. Noch eine Begründung der Theorie der höheren differentialquotienten in einem algebraischen Funktionenkorper einer unbestimmten. J für die reine und angewandte Math, 1937, 177: 215-237

46 Makar-Limanov L. On the hypersurface $x + x^2y + z^2 + t^3 = 0$ in C^4 or a C^3-like threefold which is not C^3. Israel J Math, 1996, 96(part B): 419-429

47 Gupta N. A survey on Zariski's cancellation problem. Indian J of Pure and Appled Math, 2015, 46(6): 865-877

48 Eakin P, Heinzer W. A cancellation problem for rings. Conference on Comm Algebra, Lecture Notes in Math, vol. 311: 1972, 61-77

49 Gelfand I M, Kapranov M M, Zelevinsky A V. Discriminants, resultants, and multidimensional determinants. Mod. Birkhäuser Class, Birkhäuser Boston, 2008

50 Nicolaescu L. An invitation to Morse theory. Universitext, Springer, 2011

SCIENCE CHINA Mathematics: Discriminants of noncommutative algebras and their applications

Yanhua Wang & James Zhang

Abstract In this paper, we survey some recent developments on the discriminants of noncommutative algebras and some discriminant formulas. We also give applications of discriminants to automorphism problem, isomorphism problem, cancellation problem, Tits alternative principle and Azumaya locus.

Keywords discriminant, automorphism group, affine, dominating element, cancellation problem, Azumaya locus

MSC(2010) 16W20, 11R29

doi: 10.1360/N012016-XXX