Un matematico si spiega

Steve Mitchell

1 Introduzione

Mi è successo tante volte. Mi trovo ad una festa. Stiamo in piedi, ciascuno con il bicchiere in mano. Qualcuno mi chiede: "Che lavoro fai?" (Noi americani siamo maleducati, quindi è poco probabile che ci daremmo del lei, anche se ce ne fosse un equivalente in inglese.)

Ecco, ci siamo, penso. Sono tentato di rispondere semplicemente "Sono un professore all'università", però, ripensandoci, mi rendo conto che avrei soltanto prolungato la mia sofferenza. Meglio buttarmi allo sbaraglio: "Sono un professore di matematica."

A questo punto ci sono reazioni diverse. Ne faccio un elenco, cominciando da quella più commune:

1. Il tizio fa un passo indietro, inorridito, come se avessi appena annunciato che avevo la peste bubbonica. Dopodiché si ricompone—forse ricordandosi che la matematica non è contagiosa, o almeno non fatale—e mi dice: "Non sono mai stato bravo in matematica."

Non ho mai capito il motivo per cui tanti si affrettano ad offrire questa confessione. Se avessi detto "sono un biologo", avrebbero risposto "Non ero bravo in biologia"? Se avessi detto "suono il fagotto nell'orchestra", avrebbero risposto "Non ero bravo a suonare il fagotto"? Ne dubito. Eppure tutti sono pronti a precisare—qualcuno con vergogna, qualcuno con orgoglio—che sono incompetenti in matematica.

2. "Ah, quindi devi essere tu che fai quadrare i conti a casa."

Questo fa davvero ridere, specialmente a mia moglie. Non ho mai fatto quadrare un bel niente nella mia vita. Ancora peggio:

3. "Davvero? Conosci il professore Comesichiama nel Dipartimento di Ragioneria?"

Cooooosa? Cosa diavolo c'entra la ragioneria? No che non lo conosco, e guarda caso non conosco neppure la professoressa Vattelapesca nel Dipartimento di Letteratura Finlandese. Non dico così. Essendo abituato a domande del genere, borbotto qualcosa del tipo "mi dispiace, non l'ho mai incontrato". Mi affretto ad aggiungere che non ho niente contro la ragioniera, tanto meno la letteratura finlandese. È solo che la ragioniera non ha niente—assolutamente niente—a che vedere con la matematica che io amo. Tuttavia riconosco la fonte del problema: la gente identifica la matematica con *l'aritmetica*. Di questo però discuteremo più tardi.

4. Quindi insegni matematica?

Siamo giunti a un bivio. Se me la sento di prendere la via più facile, gli rispondo semplicemente "già", dopodiché seguiamo una strada abbastanza piacevole: "Quali corsi insegni?" e così via. Rispondendo così, però, mi vergogno di essere un bugiardo e vigliacco: fatto sta che la ricerca costituisce più della metà del mio lavoro. Perciò, quando mi sento coraggioso, faccio un respiro profondo, stringo i denti e prendo l'altra via: "Sì, insegno, ma dedico la metà del mio tempo alla ricerca."

A questa dichiarazione, anni fa, un cugino di mia moglie rispose tutto incredulo: "Si può fare ricerca in matematica? Ma che cosa fai, cerchi metodi nuovi per...per..." Esitò; si capiva che stava cercando il concetto matematico più astratto, più esotico, più difficile che avesse mai sentito. Ci riuscì: "...trovare le radici quadrate?"

Sì che si può fare ricerca nella matematica. Ci sono migliaia di persone nel mondo che lo fanno. Non mi aspetto che la gente se ne intenda, però mi infastidisce quest'atteggiamento sprezzante e ignorante del cugino. È come se dicesse: "Se io non riesco a immaginare una cosa, non può esistere."

Comunque sono sempre pronto a spiegare un po' la ricerca, ammesso che chi ha fatto la domanda sia disposto a fare uno sforzo sincero per capire. Nel caso del cugino sarebbe stato fiato sprecato, e mi arresi subito. Se qualcuno si informa sul serio sulla mia ricerca, naturalmente mi piace, anche se questo ci porta inevitabilmente a un'altra domanda difficile:

5. Ci sono applicazioni pratiche della tua ricerca?

Ecco una domanda del tutto ragionevole. Eppure nel rispondere mi sento un po' sulla difensiva, e devo affrontare un'altro bivio.

Da una parte, non c'è una disciplina nel mondo che abbia più applicazioni pratiche della matematica. Anzi, un fenomeno impressionante degli ultimi anni, spinto in gran parte dalla "Rivoluzione Computer", ha dimostrato che ogni ramo di matematica—esoterico e astrattissimo che sia—prima o poi trova un'applicazione nella realtà. Per esempio, in un corso avanzato all'università, un mio studente si è lamentato che la "teoria di anelli" sembrava non aver niente a che vedere con la realtà. (Non preoccuppatevi di che cosa sia un "anello"; si tratta di una certa struttura nell'algebra astratta.)[1] Tuttavia un altro studente sui trent'anni (per lo più gli studenti di questo corso hanno 20-21 anni) ha ribattuto "Nessuno dei miei colleghi a Microsoft Research sarebbe d'accordo con te". Fatto sta che l'algebra astratta viene sempre più usata per codificare messagi inviati sul internet, per esempio; come ha detto un nostro ospite matematico recentamente, "c'è una curva ellittica nel tuo cellulare". Per questo l'impiegato di Microsoft si è iscritto nel mio corso.

[1]Soprattutto non sprecate tempo chiedendovi da dove venga il termine "anello". Un secolo fa qualcuno l'ha inventato, chissà perché, e il termine è sopravvissuto. Si tratta soltanto di un nome!

Dall'altra parte, per me la matematica di per sé costituisce una parte della "realtà". Quindi se voglio rispondere onestamente alla domanda, devo aggiungere che io faccio la matematica non per le cosidette "applicazioni pratiche", ma per la sua bellezza intrinseca. Per me, pur riconoscendo la ragionevolezza della domanda qui sopra, è come se qualcuno, avendo saputo che io facevo il compositore, mi avesse chiesto "Ci sono applicazioni pratiche delle tue sinfonie?".

****

Insomma, in questo tema cerco di spiegare un po' la matematica come io la vedo, rivolgendomi ai lettori che se ne intendono poco. Detto questo, vorrei sottolineare che quando qualcuno sostiene di essere una frana in matematica, non ci credo affatto. Nella stragrande maggioranza dei casi, quest'atteggiamento mentale ha origine da un'esperienza spiacevole alla scuola media o al liceo: un insegnante troppo duro o incompetente, delle montagne di compiti noiosi, la paura di sbagliarsi e di apparire "stupido" agli altri studenti, ecc. Avete trovato noioso memorizzare formule di aritmetica, algebra, geometria, trigonometria blah, blah, blah? Ottimo! Significa che avete buon gusto, che avete un futuro come matematici!

Vi scongiuro, cancellate i brutti ricordi scolastici, se ne avete. Lasciate perdere l'idea che la matematica fosse incisa sulla pietra secoli fa, mandataci da qualche Pezzo Grosso Matematico del Cielo. La matematica è invece un'impresa umana e vivente, un'arte riempita di un'insolita bellezza, dalla quale chiunque può trarre un gran piacere. Cercate di tornare all'infanzia, e di riprendere quella audace curiosità che hanno tutti i bambini, prima che si vengano schiacciati dalla rigidità pesante del sistema scolastico.

Finalmente, vi scongiuro di aver un po' di pazienza quando parlo della *bellezza* della matematica, il che deve sembrare esagerato, perfino assurdo, a uno che non avrebbe mai immaginato fosse possibile. Il problema è che ci vorrebbero ore—in alcuni casi, anni—perché io vi spieghi i teoremi che considero davvero bellissimi. Sarebbe come chiedere a qualcuno di capire e apprezzare un poema in cinese, senza conoscerne un singolo carattere. Per cui in questo tema mi limito a discutere concetti che sono interessanti (e abbastanza belli, secondo me), ma che si può capire senza aver molti requisiti.[2]

Ora basta coi preamboli. Divertiamoci!

2 Siamo tutti matematici, e Sudoku ne è la prova

Un giorno sono rimasto stupito nel vedere, su un sito di Sudoku, l'affermazione che "non c'è matematica nel Sudoku". Al contrario, si tratta di matematica purissima, e secondo me è proprio per questo che Sudoku è diventato così popolare.

Descrivo questo rompicapo per chi non lo conosca. Le regole sono semplicissime; anzi, ce n'è solo una. Si comincia con una griglia quadra, suddivisa in 9 righe orizzontali, 9 colonne verticali, e suddivisa in 9 sottogriglie con bordi in neretto (ma non ho messo il neretto

[2] Però—se volete avere un'idea della mia disciplina, chiamata topologia (una cugina della geometria), andate a YouTube e cercate "Outside In". Troverete in cima alla lista (spero) un video lungo 21:25 dal titolo "Outside In", di ssgelm. Vedrete che non assomiglia per niente alla ragioniera!

nell'esempio qui sotto), con alcuni degli 81 quadratini già riempiti con numeri dall'uno al nove:

		5	7					
8		7	2			5		1
				8			2	7
3			6				5	
	9	1	8		4	7	3	A
	7				9			6
1	6			4				
4		9			3	2		5
					2	4		

L'obiettivo del giocatore è di riempire i quadratini vuoti con dei numeri dall'uno al nove, così che ogni fila, ogni colonna ed ogni sottogriglia contenga i numeri dall'uno al nove. L'essenziale è capire che assolutamente NON si deve assolutamente tirare ad indovinare. Per ogni quadratino esiste un'unica possibilità. Prendiamo, come esempio, il quadratino indicato con "A" (questo quadratino è vuoto; ci ho messo "A" come un'incognita). Guardando la sua fila, si vede che A potrebbe essere uguale a 2, a 5, o a 6. Guardando poi la sua colonna, dobbiamo eliminare il 5 e il 6, quindi $A = 2$. Poi prendiamo la sottogriglia che estraggo qui con le "incognite" B,C,D,E, e F nei posti vuoti:

3	B	C
D	9	1
E	7	F

Secondo la regola, uno tra B,C,D,E,F dev'essere "6". Ma non può essere né B né C, visto che c'è già un "6" nella loro fila. Lo stesso si dica per E e F. Quindi ci rimane una sola possibilità: $D = 6$. Continuando questo processo di eliminazione, si riesce a riempire tutti gli 81 quadri in modo unicamente determinato. (Vi avverto però che in generale, il problema si dimostra molto difficile. L'esempio qui sopra è preso dal giornale di lunedi, dove mettono i Sudoku più facili.)

Ho un'amica che non sa quasi niente di matematica, che dice di non essere brava in matematica, eppure a lei piace molto il Sudoku. Quando le ho detto che il Sudoku è matematica pura", lei ha obiettato che si potrebbero sostituire i numeri con le lettere *abcdefghi*, oppure con nove simboli qualsiasi. Appunto! Ora abbiamo raggiunto il nocciolo della questione, cioè che la gente confonde la matematica con *l'aritmetica*. Il sito intendeva "non c'è dell'aritmetica nel Sudoku", il che è proprio vero. Il Sudoku richiede un'analisi logica di un motivo simbolico e quasi geometrico. Quindi richiede la matematica.

L'ironia, anzi la tragedia, è che tante persone sostengono di odiare la matematica, eppure chi gioca a Sudoku, fa matematica pura. Tutti sono matematici, che lo sappiano o meno.

3 Alla ricerca dei numeri primi

3.1 Papà, qual è il numero più grande?

Chi ha figli o nipoti certamente ha sentito una domanda simile. Tocca all'adulto spiegare che "il numero più grande" non esiste: a qualunque candidato venisse proposto quest'onore, si potrebbe aggiungere 1 e così facendo si otterrebbe un numero più grande. Vale la pena notare che si tratta di un concetto abbastanza difficile: C'è un'infinità di numeri. Del resto l'adulto, consapevole o meno, avrebbe usato un metodo di prova chiamato "prova tramite contraddizione". In termini un po' più formali, si procede così:

1. Si vuole provare l'affermazione "Il numero più grande non esista."
2. Si suppone (allo scopo di ottenere una contraddizione) che un tal numero esiste. Chiamiamo questo numero presuntuoso "N". (Volendo, si potrebbe chiamarlo Dante, Virgilio, Beatrice, o qualsiasi nome ci piacesse. Usiamo la lettera "N' per farla breve.)
3. Usando una sequenza di passi logici, si dimostra che l'ipotesi (2) conduce a una contraddizione e dunque non può essere vera. (Allora, Signor N, davvero Lei crede di essere il numero più grande? Mi dispiace informarLa che si sbaglia; $N + 1$ è più grande di Lei!)

Si può usare un simile metodo per provare qualcosa più interessante: Il numero *primo* più grande non esiste; cioè, c'è un'infinita di numeri primi. Prima di precipitarci in avanti, però, divaghiamo qualche minuto per fare un ripasso di alcuni termini e fatti, a proposito dei numeri primi.

3.2 Che cos'è un numero primo?

Ricordatevi che un numero intero è primo se è più grande di 1 e non ha fattori a parte 1 e se stesso. Per esempio, 6 *non* è un primo perché $6 = 2 \cdot 3$, mentre 5 è un primo perché oltre che $5 = 1 \cdot 5$, non c'è verso di fattorizzarlo. Fino a 50, i numeri primi sono i seguenti:

$$2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47.$$

Notate che 2 è l'unico primo paro; vedete perché?

Ora, talvolta qualcuno chiede: Perchè il numero 1 non è un primo? Vale la pena rifletterci un po', perché nascosto in questa semplice domanda si trova un tema importante del Vangelo Matematico che sto propagando. L'importante è rendersi conto che si tratta solamente di una *definizione*, e che le definizioni (e la matematica in generale) non ci vengono imposti da qualche Pezzo Grosso del Cielo. Siamo *noi* i matematici, e siamo liberi di definire i termini in qualsiasi modo ci piaccia, sempre che le due condizioni seguenti siano soddisfatte:

1. La nostra definizione è consistente logicamente.

2. La nostra definizione risulta *utile*.

A questi due va aggiunto una condizione "sociale", cioè che non ha senso cambiare termini che sono stati accettati da secoli. Potrete dichiare "da ora in poi, i numeri primi vanno chiamati 'spaghetti alla bolognese"', senza violare nessuna regola logica, ma nessuno vi darebbe retta.

Allora, certo che si potrebbe definire "numero primo" così che il numero "1" sia un primo, senza violare regola 1 qui sopra. Ma fra poco si scoprirebbe che per ogni teorema interessante va aggiunta la restrizione che si intende un numero primo più grande di 1. Tenendo in mente la Regola 2, è molto più efficiente dichiarare fin dall'inizio che "1" non è un numero primo.

Comunque sia, la morale di questa digressione è questa: Siamo *noi* i matematici. Tocca a *noi* decidere quali siano le definizioni giuste. Abbasso il Mitico Pezzo Grosso Matematico!

L'importanza dei numeri primi proviene dal fatto che ogni numero (numero intero, si capisce) sia un prodotto di numeri primi: $6 = 2 \cdot 3$, $20 = 2 \cdot 2 \cdot 5$, $105 = 3 \cdot 5 \cdot 7$ e così via. (Compresi gli stessi numeri primi; mettiamoci d'accordo che un primo è un prodotto simile con un solo fattore primo: se stesso.) Per essere precisi, affermiamo il teorema seguente:

Teorema. Sia n un numero intero $n > 1$. Allora si può fattorizzare n come un prodotto di numeri primi, cioè:

$$n = p_1 p_2 ... p_k,$$

dove ciascuno dei numeri $p_1, ..., p_k$ è un primo.

Prova: Alt! Ho sentito lo scatto inconfondibile di un cervello che si spegne, appena visto le parole "teorema" e "prova". Non ve lo permetto! Vuole dire che state ricordando qualche brutto sogno dal tempo del liceo. "Teorema" è solo una parola elaborata per un "fatto"; diciamo così solo per sottolinearne l'importanza. Quanto a una "prova", si tratta semplicemente di una spiegazione attentissima, o meglio, di una dimostrazione irrefutabile.

Immaginate, per esempio, che a Capodanno uno zio ubriaco fradicio vi biascichi "Come sarebbe a dire, ogni numero è un prodotto di numeri primi? Come diavolo lo sapete?" Voi rispondete: "Cos'è che ti confonde, a parte le tre bottiglie di vino? Prendiamo un numero qualunque $n > 1$—non mi importa un fico secco di quale numero sia. Se n stesso è primo, non c'è niente da provare. Se non è primo, vuole dire che $n = ab$, a e b essendo numeri inferiori a n. Se a e b sono primi, la festa è finita—non quella di Capodanno, s'intende. Se no, possiamo fattorizzare a e/o b in numeri più piccoli. Continuando in questo modo, i fattori diventano sempre più piccoli, quindi prima o poi il processo deve terminare con tutti i fattori primi. Ed ecco la fattorizzazione che volevamo!"

Per esempio:

$$100 = 2 \cdot 50 = 2 \cdot 2 \cdot 25 = 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 5.$$

Lo zio, intanto, è scivolato sotto la tavola, dove russa svegliando persino i morti. Ma non è stato tempo sprecato, perchè vostra sorella di undici anni stava ascoltando ogni parola e sta annuendo: ha capito, a lei è tutto chiaro. Inoltre lei fa notare il corollario:

Corollario. Sia $n > 1$ un numero intero. Allora esiste un primo q che divide n.

La parola "corollario" vuole dire che si tratta di una conclusione che segue facilmente dal teorema. In questo caso, basta prendere $q = p_1$.

3.3 Processo in tribunale: Euclid contro Il Duce

Il teorema 1 ci dice che i numeri primi sono componenti di tutti gli altri numeri. Quindi sarebbe opportuno sapere l'elenco di tutti tali numeri, ammesso che un elenco finito esistesse. Però, 2300 anni fa, il famoso matematico greco Euclide dimostrò il contrario:

Teorema 2. C'è un'infinita di numeri primi (cioè, non esiste il numero primo più grande).

Immaginiamo la prova come un processo in tribunale. L'imputato e Il Due, detto Il Duce, accusato di frode per aver ingannato il pubblico sostenendo che lui e la sua banda di primi siano gli unici primi. Il pubblico ministero è Euclide, e l'avvocato di parte civile è Guido Guerrieri, un avvocato di Bari ben noto per accettare le cause perse.[3] Lo stesso Signor Due è stato chiamato come testimone a discarico. Ora, il presidente ha dato la parola a il Pubblico Ministero, Euclide, per procedere al controesame.

Euclide: Allora, Signor Due, è vero che la chiamano "Il Duce"?

Il Due: Certo. Sono l'unico primo pari, il primo di tutti primi.

Euclide: E lei sostiene che la sua banda di primi *(accenna a una centinaia di numeri primi seduta nell'aula)* costituisca l'insieme intero dei numeri primi, che non ce ne siano altri?

Il Due: Esatto.

Euclide esita un attimo, mescolando delle carte sul tavolo. Dopo aver chiesto il permesso al presidente, si avvicina al testimone.

Euclide: Signor Due, se si moltiplica insieme 2 e 3, e si agguinge 1, e poi si divide per 3, qual è il resto?

Guerrieri: Opposizione, presidente. Che pertinenza ha quella domanda con l'oggetto del processo?

Euclid: Rispettosamente, presidente, faccio notare che secondo la previsione dell'art. 574 del Codice della Legge Matematica, è permesso far fare all'imputato qualche calcolo, sempre che se ne dimostri la pertinenza alla fine.

Presidente: Pubblico Ministero, la lascio continuare, ma si tenga nei limiti.

Euclide: Grazie presidente. Allora, Signor Due?

Il Due (con pazienza esagerata, come se si rivolgesse a un bambino): $2 \cdot 3 + 1 = 7$, quindi il resto, dividendolo per 3, è uguale a 1.

Euclide: Bene. Ma tanto per mettere in chiaro una cosa, non è stato necessario calcolare il "7", vero? Per esempio, se avessimo cominciato con $2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 + 1$, e poi lo dividiamo per 2,

[3] Vedete i libri di Gianrico Carofiglio, dai quali ho preso in prestito alcune frase usati qui.

3, 5, o 7, è chiarissimo che in ciascuno dei casi otteneremmo il resto "1". Non bisogna fare il calcolo $2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 + 1 = 211$; anzi, facendolo solo si imbroglierebbe.

Guerrieri (balzando in piedi): Opposizione, presidente. Se il pubblico ministero volesse fare la sua arringa, la presenza del testimonio sembrerebbe essere superfluo.

Presidente: Ministero Euclid, lei deve fare una domanda, se ne ha.

Euclide: Insomma, se si moltiplica insieme tutti i primi della sua banda e si aggiunge 1—chiamiamo il numero ottenuto così "M"—dividendo questo "M" per qualsiasi primo della sua banda, il resto sarà sempre 1. Vero?

Il Due: Sì.

Euclid: E quindi nessun primo della tua banda divide questo numero M, vero?

Il Due (sghignazzando): Si crederebbe nella scuola elementare. Se uno dei miei primi dividesse M, allora il resto sarebbe zero, non uno. Se questo ragionamento è troppo difficile per il Ministero, sarei lieto di spiegarglielo più lentamente.

La banda dei primi scoppiano a ridere.

Presidente: Silenzio! Suggerisco al testimone di limitarsi a rispondere alla domanda, e all'Avvocato Euclid arrivare al dunque velocemente, prima che io perda la pazienza con tutti. *Si rivolge al testimone.* È vero, sì o no?

Il Due (con un sorriso compiaciuto): Sì, è vero.

Euclide: Ricordo alla corte che stamattina Leonardo Fibonacci, matematico di Pisa, ha testimoniato che qualunque sia il numero $M > 1$, esiste un primo q che lo divide. Dunque—(*Euclide fa una pausa per far colpo*)—come lo stesso Signor Due ha appena ammesso, per il numero "M" in questione, questo primo q NON può appartenere alla sua banda di primi!

Nell'aula scoppia il pandemonio. Il Pubblico Ministero Euclide ha ragione, e il suo "Prova tramite contraddizione" si può risassumere così: Supponiamo che ci siano solo un numero finito di primi $p_1, p_2, ..., p_n$ (quindi non ce ne sono altri). Mettiamo $M = p_1 \cdot p_2 \cdot ... \cdot p_n + 1$; allora nessuno dei primi $p_1, ..., p_n$ divide M. Però, possiamo scegliere un primo q che divide M, dunque q non è uguale a nessuno dei primi p_i: una contraddizione all'ipotesi che $p_1, ..., p_n$ fossero *tutti* i primi.

Scherzi a parte, l'analogia con un processo in tribunale è molto adatta. La sola differenza è che in tribunale, i fatti vanno provati oltre un ragionevole dubbio, mentre in matematica vanno provati oltre ogni dubbio immaginabile.

3.4 Il vostro cellulare è pieno zeppo di numeri primi

Anche se spero entriate nello spirito della matematica pura, vale la pena menzionare che la vostra carta di credito, il vostro cellulare, il vostro computer e tanti altri aggeggi, pullulano di numeri primi. Occorre per esempio (1) un metodo per codificare messagi e dati confidenziali, e (2) un sistema di auto-correzione (non vorreste che un piccolo sbaglio nel codice binario cancellasse il vostro conto in banca!). Si è scoperto che la teoria dei numeri, e in particolare dei numeri primi, è molto utile per quest'applicazione pratica. L'ironia è che nel secolo scorso, il famoso matematico inglese G.H. Hardy ha detto, con certezza assoluta, che "la teoria dei numeri non avrà mai nessun'applicazione pratica".

4 Primi gemelli e altri divertimenti

Ci sono milioni e milioni di problemi aperti nella matematica, che finora nessuno ha saputo risolvere. Per questo esiste la ricerca matematica! D'altra parte, la matematica è ormai avanzata così tanto che la stragrande maggioranza di questi problemi sono quasi incomprensibili senza un lungo studio dei concetti che coinvolgono. Quindi per un tema come questo, bisogna scegliere esempi da un elenco parecchio limitato. Ciò nonostante, ci sono alcuni esempi le cui affermazioni (ma non le prove!) sono molto semplici. Eccone uno:

Un problema aperto: primi gemelli. Guardandosi l'elenco dei numeri primi < 50 qui sopra, già si vede dei motivi interessanti. Per esempio, ogni tanto appaiono un paio di "primi gemelli": $(3, 5)$, $(5, 7)$, $(11, 13)$, $(17, 19)$, $(29, 31)$ ecc. Tanto per essere preciso, chiamiamo *primi gemelli* un paio della forma $(n, n + 2)$ con n e $n + 2$ primi. La questione si pone: C'è un'infinità di primi gemelli? Questo è un problema aperto; molti hanno provato a risolverlo, ma finora nessuno ci è riuscito. Non dico che il problema sia molto importante; il suo interesse risiede nel fatto che è una domanda semplicissima, che una persona qualsiasi può capire, sia un matematico o meno. Eppure nessuno sa trovare una soluzione. Il metodo di Euclide si rivela del tutto inutile; occorre un lampo di genio, un'idea nuova che non è venuta in mente a nessuno! Se ce la faceste voi, diventereste famosi!

D'altra parte, qualcuno ha detto: "La matematica è l'arte di trovare problemi che si riescono a risolvere." Visto che il problema dei primi gemelli è difficilissimo, anzi aperto, cerchiamo qualcosa di più ragionevole. Per cominciare, vi offro due divertimenti. (Non sono esercizi, sono divertimenti!)

Divertimento 1. Facciamo una nostra definizione, traendo ispirazione dal calcio: Una *tripletta* consiste di tre primi impari consecutivi. Per esempio, $(3, 5, 7)$ è una tripletta. Dimostrate che difatti $(3, 5, 7)$ è l'unica tripletta, che non ce ne sono altre.

(Cercate una prova tipo "Sudoku", cioè usate un processo che va per eliminazioni, in modo che alla fine rimanga una sola possibilità.)

Divertimento 2. La distribuzione dei primi, fra i numeri generali, si dimostra misteriosa. Per esempio, qual è l'intervallo fra un numero primo e il prossimo? Ad un estremo si trovano i primi gemelli: Dopo 11, ad esempio, facendo due passi in avanti, arriviamo a 13. D'altronde, cominciando dal numero 23, il prossimo primo è 29; qui, ci occorrono sei passi.

Una domanda fondamentale si pone: Esiste un limite alla lunghezza dell'intervallo? Per esempio, possibile che qualunque sia il numero primo dal quale si comincia, ne troveremmo un altro dopo 100 passi? La risposta è NO, e potete dimostrarlo voi. Cioè, dimostrate che qualunque sia il numero M (pensate a un numero grandissimo), si può trovare M numeri consecutivi, nessuno dei quali è primo.

L'idea: Usiamo la notazione $n!$ per indicare il prodotto dei numeri da 1 fino a n. Per esempio, $4! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$, $5! = (4!) \cdot 5 = 120$ e così via. L'uso di un punto esclamativo è piuttosto strano, ma è stato stabilito secoli fa. Ora, pensate agli M numeri $(M+1)! + 2, (M+1)! + 3, ..., (M+1)! + M + 1$. Che cosa potete concludere? (Ho scelto $M+1$ invece di M solo per avere un elenco di M numeri.)

5 I numeri immaginari: impostori sfacciati, o vittime innocenti di un semplice equivoco?

Secoli fa, qualcuno—non so chi sia stato il colpevole—escogitò il nome "numeri immaginari" per numeri tipo $\sqrt{-1}$, che coinvolgono la radice quadrata di un numero negativo. Come risultato questi poveri numeri vengono spesso maltrattati come se fossero impostori, ingannatori, o solo il frutto dell'immaginazione di un matematico matto. Invece la $\sqrt{-1}$ è tanto reale quanto il 3, il -5, il $\sqrt{2}$, o il naso sulla vostra faccia. L'equivoco è completamente psicologico, a colpa di questo nome sfortunato "immaginario".

Ma aspettate un attimo—sento una discussione che si accende tra due uomini all'angolo della strada laggiù. Origliamo un po'.

Don Camillo: ...e io ti dico che invece sì, esiste una radice quadrata di -1. Lo si denota $i = \sqrt{-1}$, tradizionalmente. Difatti ne esistono due: i e $-i$.

Peppone: Ma guardate che asino siete! Tutti sanno che quando si prendono due numeri positivi, e li si moltiplicano, si ottiene un numero positivo, e se i due numeri sono negativi, il numero così ottenuto è altrettanto positivo. Quindi è impossibile quadrare un numero e ottenere un numero negativo. Che esista una soluzione del equazione $x^2 = -1$? Roba da crepare dal ridere!

Don Camillo: Sei una bestia cocciuta come un mulo, Peppone. Per una volta startene zitto perché io te lo spieghi—

Peppone: Cosa vorreste insinuare? Ho una mezza idea di appiopparvi un pugno sul muso!

Don Camillo: Prendiamo le cose per un altro verso. *(Si ferma a pensare un attimo.)* Allora, l'altro giorno un farabutto del paese mi ha proposto che si possa risolvere l'equazione $5 + x = 3$. Ma non l'ho bevuta. È palesamente impossibile, per cui gli ho pitturato sul sedere cinque nerbate da far levare il pelo a un ippopotamo.

Peppone: Come sarebbe a dire, impossibile? Se io a scuola avessi risposto così, la maestra mi avrebbe pestato bacchettate sulla zucca.

Don Camillo: Si tratta di una zucca durissima, mi pare. È del tutto ridicolo mantenere che si può *aggiungere* qualcosa al 5 per poi ottenere un numero più *piccolo*.

Peppone: Che stupidaggine! Basta aggiungere un numero *negativo*: $5 + (-2) = 3$.

Don Camillo: Allora non è un numero come Dio comanda. Questi mascalzoni "negativi" dei quali stai parlando, dovrebbero essere chiamati "numeri finti", oppure "numeri rossi". Insomma, numeri immaginari.

Peppone: Numeri rossi? Ah, si capisce: mi prendete in giro, facendo l'Avvocato del Diavolo. Il che, dato il vostro mestiere, è piuttosto ironico. Penso proprio di rifilarvi una sberla da far fischiare l'aria!

Don Camillo. E io ti darei un calcio al sedere da farti volare fino alle campane della torre!

Lasciamo i due antagonisti a litigare.[4]

In questo caso Don Camillo l'ha vinta: I cosidetti numeri immaginari non sono per niente immaginari; o per fare l'osservazione in un altro modo, se si ritiene che $\sqrt{-1}$ sia immaginario, tanto vale dichiare che i numeri negativi siano "immaginari". All'inizio del mondo, si cominciò con i numeri interi positivi $1, 2, 3...$ Dopo qualche millenio, però, si inventarono (oppure si scoprono; dipende del punto di vista filosofico) i numeri negativi, i quali si rivelarono utilissimi *anche se il problema che si voleva risolvere aveva una soluzione positiva alla fine*. Il punto è che i numeri negativi possono agevolare la soluzione come passi intermedi. Con le frazioni, si vede la stessa cosa. L'equazione $2x = 1$, per esempio, non ha nessuna soluzione nei numeri interi. Si devono inventare le frazioni: $x = \frac{1}{2}$. L'equazione $x^2 = 2$ non ha nessuna soluzione frazionale (questo però non è ovvio!—lo discuteremo in un altro momento); si devono inventare i numeri "reali". E finalmente $x^2 = -1$ non ha nessuna soluzione "reale"; si devono inventare i numeri "immaginari", o meglio, per evitare il suddetto equivoco psicologico, i numeri *complessi*.

Fermiamoci un attimo per dimostrare che la $\sqrt{-1}$ non è un animale esotico e selvaggio, bensì un animale domestico, familiare, addirittura amichevole. Bisogna solo aprire un po' la mente ed espandere il concetto di "numero" (cosa che avete già fatto per concepire i numeri negativi). Pensiamo al numero -1 nel contesto della moltiplicazione (invece dell'addizione), e pensiamoci in modo geometrico, visualizzando i numeri "reali" come una linea. Allora l'atto di moltiplicazione per -1 equivale a una rotazione di 180 gradi della linea. Dimostratelo voi: Mettetevi in piedi (non abbiate paura, non c'è niente di pericoloso) e allargate le braccia così che siano orrizontali e le punte delle dite e il torace formino una linea retta. Ora, fate dietro-fronte. Bravi! Avete eseguito "-1". Poi fate la stessa cosa una volta, così da trovarvi nella posizione originale. Ottimo lavoro, avete dimostrato che $(-1)^2 = 1$: il simbolo $(-1)^2$ è soltanto un'abbreviazione per "fate la stessa cosa due volte di seguito".

[4] Vedete "Don Camillo" di Giovannino Guareschi, dal quale ho plagiato—scusate, preso in prestito—alcune delle frasi usate qui. Don Camillo è il prete, e Peppone il sindaco comunista, di un paese della Bassa. Le frasi "pestato bacchettate sulla zucca" e "pitturato sul sedere cinque nerbate da far levare il pelo a un ippopotamo" li ho presi parola per parola da Don Camillo; vedete "Scuola serale" e "Spedizione punitiva".

Ora siete pronti per il passo cruciale, la "$\sqrt{-1}$"! Vuole dire un'operazione che, eseguita due volte, equivale all'operazione dietro-front che avete appena fatta. Cioè, nient'altro che una rotazione di 90 gradi! Allora, con le braccia ancora levate orizzontalmente, fatevi ruotare 90 gradi. Fatelo ancora una volta. Bravissimi! Avete dimostrato l'esistenza della $\sqrt{-1}$! Aspettate un attimo; che cos'avete detto? Che si può ruotare in due direzioni, in senso orario o antiorario? Ottima osservazione; è appunto a questo che si riferiva Don Camillo quando diceva che ci sono *due* radici quadrate di -1. È consuetudine chiamare quella in senso antiorario i, da cui segue che l'altra è $-i$.

Per farla breve, dunque, la $\sqrt{-1}$ non è niente di misterioso; è solo una rotazione di 90 gradi, tutto qui. Potrete obiettare di chiamarla un "numero", ma questa obiezione non vale, perché qualcun'altro potrebbe essere contrario a chiamare -1 un "numero". Fatto sta che si può costruire un intero sistema di "numeri complessi", che sono di gran lunga superiore ai numeri "reali", proprio perchè nei numeri complessi esistono radici quadrate di numeri negativi. Del resto i numeri complessi risultano utilissimi nella scienza e nell'ingegneria (per non parlare della matematica di per sé, nella quale sono assolutamente essenziali). Mio padre, per esempio, faceva l'ingegnere elettrico, e nel suo lavoro usava "l'analisi complessa", che vuole dire il calcolo differenziale/integrale fatto coi numeri complessi. E a pensarci bene, non c'è da meravigliarsi che le cose stiano così; basta usare un po' d'immaginazione. I numeri complessi hanno a che vedere con la geometria del piano—già qualcosa di importanza evidente—e particolarmente con le rotazioni, quindi con le onde, quindi con la radiazione elettromagnetica e tante altre cose.

Insomma, la prossima volta che fate un'inversione a U girando a sinistra due volte, rendetevi conto che avete dimostrato l'esistenza della $\sqrt{-1}$!

6 Un soprano incontra il problema $3n + 1$

Ho due figlie, che hanno 29 e 31 anni (primi gemelli!). Talvolta qualcuno mi chiede: "Quando loro erano giovani, volevi che studiassero matematica?" Devo premettere che il fatto che siano femmine non c'entra affatto; se fossero maschi la mia risposta sarebbe la stessa: "Certo che no, neanche per sogno." Da quando sono nate, ho voluto per loro una cosa sola: che seguissero i *loro* sogni, non i miei.

D'altra parte, cercavo sempre di comunicargli quanto la matematica fosse bella e divertente. Quando erano nell'età della scuola elementare, ogni sabato d'inverno la famiglia andava a sciare. La seggiovia aveva più di cento sedie, ciascuna con il suo numero. Mentre salivamo in cima, discutevamo del nostro numero, chiedendoci cosa ci fosse di interessante, notevole, insolito, bello. All'inizio le bambine pensavano, naturalmente, a cose tipo "numero 8! la mia età!". Io invece gli facevo notare che l'8 è un cubo ($8 = 2^3$), che 23 è un numero primo, che 17, oltre che essere un primo, ha un "gemello" 19 e così via. Ne facevo senz'altro un gioco. Tuttavia spiegavo, senza che sembrasse che le stessi correggendouno "sbaglio", che fatti tipo "le cifre di 44 fanno la mia età: $4 + 4 = 8$" non valgono, perchè le cifre di un numero non hanno nessuna importanza intrinseca; sono solo una conseguenza della "base 10" che noi umani usiamo. D'altronde, la scelta della "base" non c'entra con il fatto che un numero sia primo, o che 64—dico a Abigail—sia il quadro della tua età.

Quando Abby aveva quindici anni e stava per finire l'ultimo corso di matematica prescritto dal liceo, mi annunciò che sarebbe stato l'ultimo corso di matematica nella sua vita. Lo disse in tono di sfida, come se si aspettasse che questa notizia mi scioccasse e provacasse una reazione—o al minimo, che tentassi di convincerla a cambiare idea. In questo però fu delusa, perchè—e glielo dissi con grandissimo affetto—me ne infischiai; per quello che mi interessava avrebbe potuto scappare di casa e unirsi al circo ambulante. Sempre che—ecco il punto cruciale—esibirsi al circo fosse davvero il suo sogno.

Anni dopo, mentre faceva il soprano alla Scuola di Musica all'università dell'Indiana a Bloomington, tanto per fare qualcosa di diverso, cominciò a studiare un po' di matematica da sola. Leggeva un libro dal titolo "Adventures in number theory" ("Avventure nella teoria dei numeri"), e per un semestre si iscrisse perfino in un corso di *Independent Study* (lezioni privati) con un professore di matematica a Bloomington. Nonostante lui fosse un mio collega, questo programma era del tutto insolito; nella matematica Abigail era appena al livello della scuola media, eppure non vedeva nessuna ragione per cui questo le potesse impedire di studiare matematica all'università. Mesi dopo, il professore mi ha detto che l'*Independent Study* con Abby era stato lo studio più interessante che avesse mai diretto. Malgrado la sua ignoranza in matematica, Abby aveva una curiosità, un'indipendenza, un approccio intrepido che rendeva le lezioni molto gratificanti per il professore, quanto per la studentessa. Racconto questa storia non per vantarmi di mia figlia, bensì per sottolineare la cosa più importante per uno studente di matematica: il suo *atteggiamento mentale*, soprattutto la curiosità e una mente aperta.

Un giorno, quando il ventisettimo compleanno d'una sua amica si stava avvicinando, Abby andò sul internet per cercare qualcosa d'interessante sul numero 27, proprio come avevamo fatto anni prima sulla seggiovia. Sapeva che il 27 è un cubo—$27 = 3^3$—ma cercava qualcosa di diversa. Così scoprì il problema $3n+1$, di cui perfino suo padre matematico non aveva mai sentito parlare. Si tratta di un problema semplicissimo, eppure finora nessuno è riuscito a risolverlo.

Per cominciare, si prende un numero intero, più grande di 1; chiamiamo questo numero "n". (Oppure, puoi chiamarlo "Alfredo" o "Roberta" o qualunque nome ti piaccia. Devi ammettere, però, che il nome tradizionale "n" ha il vantaggio di essere corto.)

Poi si eseguono le seguenti operazioni:

1. Se il numero è pari, lo si divide per 2: $n \longrightarrow n/2$.
2. Se il numero è dispari, lo si multiplica per 3 e poi si aggiunge 1: $n \longrightarrow 3n+1$.
3. Se si arriva al numero 1, dopo alcune ripetezioni, ci si ferma.

L'idea è di provare a raggiungere il numero 1. Facciamo qualche esempio:

Esempio 1:

$$3 \longrightarrow 10 \longrightarrow 5 \longrightarrow 16 \longrightarrow 8 \longrightarrow 4 \longrightarrow 2 \longrightarrow 1.$$

Esempio 2:

$$13 \longrightarrow 40 \longrightarrow 20 \longrightarrow 10...$$

Ah, aspetta un attimo; si vede già dal esempio 1 che dal 10 si raggiunge 1.

Esempio 3:

$$7 \longrightarrow 22 \longrightarrow 11 \longrightarrow 34 \longrightarrow 17 \longrightarrow 52 \longrightarrow 26 \longrightarrow 13...$$

e qui ci si può fermare visto che 13 è già apparso nel esempio 2.

Allora, ecco il problema: È vero che, qualunque sia il numero iniziale, il processo finisce per raggiungere 1?

La soluzione nessuno la sa. Con l'aiuto di un computer, è facile verificare che la risposta è positiva per milioni di numeri. Ma questa evidenza empirica non *prova* niente. È sempre possibile che esista un "contro-esempio" che non abbiamo ancora trovato. Occorre una prova logica, come la prova di Euclide per l'infinità dei numeri primi. Il problema è aperto. Se riusciste a risolverlo, diventereste famosi!

Cosa c'entra il 27? Per tutti i numeri minori di 27, il processo non richiede tanti passi prima di raggiungere l'1, e per di più il numero più grande che si visita, strada facendo, non è tanto grande: Cominciando con il 25, occorrono 23 passi, e il numero più grande che si vede, strada facendo, è l'160. Cominciando dal 26, si fanno solo 10 passi e la festa è finita, dopo aver salito fino al 40, una piccola collina. (Provatevi voi! Solo così puoi cogliere un senso di questi numeri strani.) La sorpresa viene cominciando con il 27: Si devono fare 111 passi, arrampicandosi fino all'altezza 9232, prima di scendere delle pazzesche montagne russe fino all'1.

La stessa Abby si è divertita un po', giocando con il problema $3n + 1$. Siamo tutti matematici!